Marcin Skalny

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
w Olsztynie

Warmia and Mazury University
in Olsztyn

INTUICYJNE KONCEPCJE KONTINUUM

Intuitive Conceptions of Continuity

Słowa kluczowe: kontinuum, filozofia matematyki, Giusseppe Veronese, Paul du Bois-Reymond, Franz Brentano, Charles Sanders Peirce, Henri Poincare.

Key words: continuity, philosophy of mathematics, Giusseppe Veronese, Paul du Bois-Reymond, Franz Brentano, Charles Sanders Peirce, Henri Poincare.

Streszczenie

W artykule autor rozważa koncepcje kontinuum oparte na intuicji stworzone przez Giusseppe Veronesa, Paula du Bois-Reymond, Franza Brentano, Charlesa Sandersa Peirca i Henriego Poincarego w odpowiedzi na idee arytmetycznego kontinuum Richarda Dedekinda i Georga Cantora. Stara się znaleźć wspólny czynnik, który łączy pojęcia intuicyjnego kontinuum użyte przez wspomnianych matematyków i filozofów.

Abstract

The subjects of consideration in this article are intuition-based conceptions of continuity; the conceptions created by Giusseppe Veronese, Paul du Bois-Reymond, Franz Brentano, Charles Sanders Peirce and Henri Poincare in response to Richard Dedekind and Georg Cantor's ideas of arithmetical continuity. The author tries to find a common factor in the notions of the intuitive continuity used by the mentioned mathematicians and philosophers.

Dynamiczny rozwój rachunku różniczkowego w XVIII wieku nie zmienił faktu, że pojęcia leżące u jego podstawy miały charakter intuicyjny i brakowało im ścisłych definicji, co czyniło rachunek różniczkowy podatnym na krytykę m.in. ze strony George'a Berkeleya[1]. Wobec takiego stanu rzeczy XIX-wieczni matematycy zaczęli przywiązywać większą wagę do precyzyjnego ujmowania rozważanych zagadnień. Do wiodących przedstawicieli tego nurtu zaliczał się Karl

[1] Por. G. Berkeley, *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, Wherein It Is Examined whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis Are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*, (w:) W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. I, Oxford University Press, Oxford 2005. s. 62–92.

Weierstrass, który postawił sobie za cel arytmetyzację analizy matematycznej oraz odrzucenie intuicji czasowo-przestrzennej jako elementu współtworzącego jej fundamenty[2]. Śladami Weierstrassa poszli Richard Dedekind i Georg Cantor. Jednym z głównych pojęć, które ich zdaniem wymagały uściślenia, było pojęcie kontinuum.

W pracy *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* Georg Cantor zauważa, że pojęcie kontinuum, pomimo odgrywania przez wieki ważnej roli w nauce, nigdy nie doczekało się jasnej i ścisłej definicji. Przyczyniło się to do nieporozumień oraz nierozstrzygalnych sporów. Zdaniem twórcy teorii mnogości, pojęcie kontinuum nie wywodzi się z czasowo-przestrzennych intuicji, lecz jest osiągane w ramach badań czysto matematycznych, przez co posiada bardziej fundamentalny i ogólny charakter. Dopiero po wypracowaniu abstrakcyjnego pojęcia kontinuum możliwe staje się zrozumienie szczególnego przypadku ciągłości przynależącej czasowi i przestrzeni[3].

Zaangażowanie się Dedekinda w arytmetyzację analizy datuje się od 1858 r., gdy prowadził on wykłady z podstaw rachunku różniczkowego na politechnice w Zurychu. Zwrócił wówczas uwagę na praktykę wprowadzania elementarnych pojęć tejże dziedziny matematyki poprzez odwoływanie się do intuicji i wyobrażeń geometrycznych. Nie zaprzeczał, że metoda ta jest przydatna w procesie nauczania. Doszedł jednak do wniosku, iż rachunek różniczkowy nie powinien opierać się na fundamentach, które są – jego zdaniem – nienaukowe i pozbawione ścisłości należytej naukom matematycznym. Postanowił sformułować podstawy rachunku różniczkowego w rygorystyczny i czysto arytmetyczny sposób[4]. Podobnie jak Cantor, głosił, że badanie własności czasu i przestrzeni jest prowadzone w oparciu o pojęcia i koncepcje, które zostały wytworzone wcześniej przez intelekt i stanowią logiczne konstrukcje. Do pojęć tych należy w szczególności liczbowe kontinuum[5].

W koncepcjach Cantora i Dedekinda kontinuum zostało powiązane ze zbiorem liczb rzeczywistych. Twierdzili oni, że system tych liczb w sposób adekwatny oddaje naturę każdego kontinuum. Przekonanie to wyraża się w tzw. aksjomacie Cantora-Dedekinda, który głosi, że istnieje izomorfizm pomiędzy liczbami

[2] Por. J.L. Bell, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimerica, Mediolan 2006. s. 149.

[3] Por. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, (w:) E. Zermelo (Hrsg.), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Springer-Verlag, Berlin 1932, s. 190–192.

[4] Por. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (fragment), (w:) *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, przeł. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003, s. 152–153.

[5] Por. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Brunszwik 1961, s. III–IV.

rzeczywistymi (tworzącymi kontinuum arytmetyczne) a punktami linii (tworzącymi kontinuum geometryczne)[6].

Zdaniem Buckleya, kontinua Dedekinda i Cantora cechuje kompozycyjna ciągłość (*compositional continuity*), choć są złożone z nieciągłych elementów, czyli punktów. Owe części składowe są logicznie pierwotne względem kontinuum jako całości. Błędem, który popełnili Dedekind i Cantor, jest uznanie, iż punkty – narzędzia służące jedynie do mierzenia, dzielenia i manipulowania częściami kontinuum – są rzeczywistymi częściami składowymi ciągłych obiektów[7].

W odpowiedzi na dążenie zwolenników arytmetyzacji do nadania pojęciu kontinuum ścisłej, wyrażonej w sposób arytmetyczny postaci pojawiły się koncepcje kontinuum związanego nierozłącznie z intuicją, kontinuum, które ma prawdziwie niedyskretny charakter i na mocy swojej natury nie może zostać zredukowane do elementów nieciągłych. Koncepcje takie sformułowali m.in.: Luitzen Brouwer, Giusseppe Veronese, Paul du Bois-Reymond, Franz Brentano, Charles Sanders Peirce i Henri Poincare.

Luitzen Brouwer

Luitzen Brouwer znany jest jako twórca intuicjonizmu – jednego z głównych, obok formalizmu i logicyzmu, kierunków w filozofii matematyki, które ukształtowały się na początku XX wieku. Ten holenderski matematyk określał mianem intuicjonizmu filozofię matematyki Kanta, w ramach której wywodzi się pojęcia arytmetyczne i geometryczne z apriorycznych form zmysłowości czasu i przestrzeni. Swą filozofię nazwał neointuicjonizmem. W odróżnieniu od myśliciela z Królewca Brouwer odrzucał aprioryczność przestrzeni i za podstawowe źródło pojęć i metod matematyki uznawał pierwotną intuicję czasu, wywodzącą się z doświadczanego przez człowieka rozpadania się przemijających momentów na dwa jakościowo odmienne elementy, z których jeden ustępuje miejsca drugiemu i jednocześnie jest zachowywany w pamięci. Tak doświadczany czas jest połączeniem tego, co dyskretne (każdy moment stanowi pewną całość, która jest odróżnialna od innych momentów) i tego, co ciągłe (sekwencja momentów czasowych jest tworzona z arbitralnie wybranej wielości fenomenów, nie jest możliwe wskazanie momentów podstawowych konstytuujących czasowe kontinuum)[8]. Na podstawie pierwotnej intuicji czasu uformowana zostaje ogólniejsza intuicja liniowego kontinuum:

---

[6] Por. P. Ehrlich, *Wstęp* (do:) *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer Academic Publishers, Dordlecht – Boston – Londyn 1994, s. VIII.

[7] Por. B.J. Buckley, *The Continuity Debate: Dedekind, Cantor, du Bois-Reymond and Peirce on Continuity and Infinitesimals*, Docent Press, Boston 2012, s. 154.

[8] Por. L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1975, s. 17.

> W końcu ta podstawowa intuicja matematyki, w której jednoczy się to, co połączone i to, co rozdzielone, to, co spójne i to, co dyskretne prowadzi bezpośrednio do powstania intuicji liniowego kontinuum, tzn. [intuicji] tego, co *pomiędzy*, czego nie można wyczerpać przez wstawianie nowych elementów i co w związku z tym nie może być traktowane jedynie jako kolekcja jednostek.[9]

Kontinuum dane w pierwotnej matematycznej intuicji jest całością, której nie można skonstruować poprzez wskazanie i złożenie wszystkich wchodzących w jego skład punktów[10], gdyż każdy ich zbiór (podobnie jak zbiór doświadczanych momentów czasu) ma niefundamentalny i przygodny charakter.

Giuseppe Veronese

Włoski matematyk Giuseppe Veronese sprzeciwiał się traktowaniu arytmetyki jako podstawy rozpatrywania zagadnień geometrycznych, takich jak ciągłość liniowa. Jego zdaniem do zrozumienia, czym jest kontinuum, nie jest potrzebna definicja matematyczna, gdyż ujmuje się je w sposób intuicyjny – jako wspólną cechę takich przedmiotów, jak np. czas i linia prosta. Ogólne pojęcie kontinuum otrzymuje się na drodze abstrakcji od cech szczegółowych takich obiektów[11]. Według Veronese'a kontinuum można rozkładać wyłącznie na wielkości relatywnie niepodzielne. Wielkości takie są nierozkładalne jedynie z punktu widzenia przyjętej arbitralnie metody podziału. Własność ta odnosi się zarówno do ciągłości konkretnych obiektów, np. czasu (natura wielkości niepodzielnej zależy w takim przypadku od dokładności narzędzi obserwacyjnych), jak i do ciągłości rozpatrywanej abstrakcyjnie (wówczas wielkość niepodzielna jest warunkowana procedurą, w zgodzie z którą dokonuje się podziału).

Kontinuum nie może składać się z punktów matematycznych, gdyż są one absolutnie niepodzielne, absolutnie nierozkładalne. Punkty są dla Veronese'a co najwyżej znacznikami miejsc, w których łączą się różne kontinua. Są one jedynie „osadzane" w kontinuum poprzez operacje umysłowe. Nie wchodzą jednak w skład żadnej ciągłości. Przykładem tego jest punkt, w którym stykają się dwa odcinki linii o różnych kolorach, np. białym i czerwonym. Każda część linii jest pomalowana na jeden z tych kolorów. Punkt, w którym spotykają się różnobarwne części, nie może być ani biały, ani czerwony, w przeciwnym razie musiałby należeć do jednego z tych dwóch odcinków i nie byłby miejscem ich zetknięcia. Musi on więc znajdować się poza linią[12].

---

[9] L.E.J. Brouwer, *Intuicjonizm i formalizm*, (w:) *Filozofia matematyki. Antologia...*, s. 295.

[10] Por. L.E.J. Brouwer, op. cit., s. 45.

[11] Por. J.L. Bell, op. cit., s. 196–197.

[12] Por. ibidem, s. 198.

Stwierdzenie Veronese'a, że związek pomiędzy liniowym zbiorem punktów, którym odpowiadają liczby rzeczywiste, a kontinuum liniowym ma jedynie arbitralny charakter oraz jego poglądy na temat wielkości nieskończenie małej wywołały gwałtowną krytykę ze strony Georga Cantora[13]. Twórca teorii mnogości uważał, że jego koncepcje odpowiadają prawdziwej naturze zbiorów i liczb. Nie może być mowy o dowolności w formułowanych przez niego twierdzeniach.

Paul du Bois-Reymond

Niemiecki matematyk i fizyk Paul du Bois-Reymond zainteresował się tematem stosunku teorii matematycznych do świata fizycznego i natury samej wiedzy matematycznej w następstwie własnej praktyki stosowania matematyki w badaniach fizycznych. Rozważając pochodzenie podstawowych pojęć matematyki, uznał, że nie mają one ścisłego charakteru, lecz wywodzą się z intuicji. Miał nadzieję, że jej zbadanie doprowadzi do ukształtowania solidniejszych fundamentów nauk matematycznych.

W pracy *Die allgemeine Functionentheorie* Bois-Reymond wyróżnił dwa filozoficzne podejścia do matematyki: idealistyczne i empiryczne[14]. Każde z nich jest źródłem całkowicie odmiennych intuicji, na których opierają się takie matematyczne pojęcia, jak wielkość nieskończenie mała, ciągłość linii geometrycznej czy związek między kontinuum geometrycznym a kontinuum liczbowym[15]. Zdaniem Bois-Reymonda, każda osoba, która zajmuje się matematyką, w swych rozważaniach polega częściowo na intuicjach idealistycznych, a częściowo na intuicjach empirycznych. Wzajemne mieszanie się tych przeciwstawnych sobie prądów jest przyczyną trudności w ścisłym wyjaśnieniu podstawowych pojęć matematycznych.

Podejście idealistyczne wiąże się z uznaniem obiektów idealnych za przedmiot badań matematycznych. Do obiektów tych zaliczają się m.in. idealne figury geometryczne. Przedmioty te nie muszą posiadać żadnych odpowiedników w świecie zmysłowych, gdyż warunkiem ich istnienia jest wyłącznie zadośćuczynienie określonym kryteriom logicznym.

Podejście empiryczne neguje istnienie tych obiektów matematycznych, które nie dają się zredukować do przedmiotów zmysłowego doświadczenia ani nie są z tymi przedmiotami w żaden sposób związane. Zgodnie ze stanowiskiem empirycznym początkiem matematyki są dane wyabstrahowane z percepcji zmysłowej.

[13] Por. J.W. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1990, s. 233–236.

[14] Por. P. Du Bois-Reymond, *Die allgemeine Functionentheorie*, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung Tubingen 1882, s. 3.

[15] Por. B.J. Buckley, op. cit., s. 89.

Abstrakcja ta ma swe granice – może być prowadzona jedynie w takiej mierze, w jakiej otrzymywane w jej wyniku obiekty zachowują łączność z doświadczeniem. Zadaniem nauk matematycznych, według podejścia empirycznego, jest ilościowe wyjaśnienie własności świata fizycznego. Stąd też empiryzm uznaje jedynie obiekty możliwe fizycznie, w odróżnieniu od idealizmu, w ramach którego sama możliwość logiczna jest wystarczającym warunkiem, aby stać się pełnomocnym przedmiotem badań.

Empirysta nie uznaje istnienia matematycznego kontinuum liniowego ani liczbowego. Obiekty takie musiałyby składać się z aktualnie nieskończenie wielu elementów. Pojęcie ciągłości, podobnie jak pojęcie nieskończoności aktualnej, nie wywodzi się z doświadczenia i nie może zostać do niego zredukowane. W podejściu empirycznym odrzucone zostają takie obiekty, jak bezwymiarowy punkt czy jednowymiarowa linia. Linia geometryczna posiada pewną grubość, która może być dowolnie mała, jednak zawsze musi być większa od zera. Nie istnieje bowiem żaden przedmiot percepcji zmysłowej, który miałby zerowy rozmiar. Linia geometryczna składa się ponadto z punktów o niezerowych wymiarach, których rozciągłość równa się grubości linii. Na podstawowym poziomie linia posiada więc nieciągły charakter[16].

Według podejścia idealistycznego, kontinuum istnieje. Nie jest ono redukowalne do tego, co dyskretne. Nie składa się z punktów, które – jako obiekty bezwymiarowe – nie mogą wytworzyć rozciągłości. Punkty są jedynie nienależącymi do linii instrumentami służącymi do jej podziału. Gdy kontinuum zostaje podzielone na nieskończenie wiele części, rezultatem nie jest mnogość punktów, lecz nieskończona ilość infinitezymalnych odcinków[17].

Infinitezymalne odcinki są wielkościami niearchimedesowymi, tzn. pomimo że są wielkościami niezerowymi, połączenie jakiejkolwiek skończonej ich liczby nigdy nie utworzy skończonego odcinka. Poza tym dwa skończone odcinki różniące się nieskończenie małą długością są równe. Stają się one nierówne dopiero, gdy różnią się skończoną wielkością. Skończony odcinek nie zmienia się również, gdy zostaje do niego dodany lub odjęty odcinek infinitezymalny. Odcinki takie tworzą kontinuum i są jednocześnie jego lustrzanymi odbiciami, posiadają takie same cechy jak całość, której są elementami.

Henri Poincare

Wybitny francuski matematyk Henri Poincare dokonał rozróżnienia pomiędzy kontinuum matematycznym a kontinuum fizycznym. Kontinuum matematyczne to wytworzony przez człowieka układ symboli, w ramach którego usuwa-

[16] Por. ibidem, s. 102–103.

[17] Por. J.L. Bell, op. cit., s. 194–195.

ne są sprzeczności związane z postrzeganym zmysłowo fizycznym kontinuum. Sprzeczność taka ujawnia się np. przy próbie samodzielnego porównania wagi trzech ciężarków: 10-gramowego ciężarka *A*, 11-gramowego ciężarka *B* oraz 12-gramowego ciężarka *C*. Różnica pomiędzy wagą ciężarków *A* i *B* jest nieodczuwalna dla człowieka. Podobnie osoba ważąca w dłoniach ciężarki *B* i C nie dostrzeże pomiędzy nimi żadnej różnicy. Może więc uznać, że ciężarek A waży tyle samo, co ciężarek *B*, a ciężarek *B* waży tyle samo, co ciężarek *C*. Gdy jednak spróbuje zważyć ciężarki *A* i *C*, których waga różni się w dwukrotnie większym stopniu, będzie w stanie dostrzec, że ciężarek *A* jest lżejszy. Odczuwane przez osobę dokonującą pomiaru zależności pomiędzy wagami ciężarków, mogą zostać przedstawione przy pomocy wzorów:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C$$

Powyższe wzory oddają, zdaniem Poincarego, istotę postrzeganego zmysłowo fizycznego kontinuum[18]. Zawierają one jednak sprzeczność, gdyż *A*, jako równe z *B*, powinno być też równe z *C*, tymczasem jest mniejsze od *C*. Wyrugowanie takich trudności stanowi zadanie kontinuum matematycznego, u którego podstaw leży zbiór liczb rzeczywistych:

> *Continuum*, tak rozumiane [matematycznie], jest tylko zbiorem indywiduów, uszeregowanych w pewnym porządku; jest ich wprawdzie nieskończenie wiele, lecz każde jest zewnętrzne względem innych. Nie odpowiada to zwykłemu pojmowaniu, przypuszczającemu między elementami, stanowiącemi *continuum*, pewną łącznię wewnętrzną tworzącą z nich całość, w której nie punkt istnieje przed linią lecz linia przed punktem. Ze słynnej formuły: »*continuum* jest to jedność w mnogości« – pozostała tylko mnogość, jedność znikła. Niemniej wszakże analitycy mają zupełną słuszność, gdy określają swoje *continuum* w sposób wskazany powyżej, bo takie właśnie jest przedmiotem ich rozumowań od czasu, gdy w rozumowaniach tych zaczęli skwapliwie przestrzegać ścisłości. Wystarcza to, byśmy zdali sobie sprawę z tego, że prawdziwe *continuum* matematyczne jest czymś zupełnie innym niż *continuum* fizyków oraz metafizyków.[19]

Charles Sanders Peirce

Pojęcie ciągłości odgrywa ważną rolę również w metafizyce Charlesa Sandersa Peirce'a. Według amerykańskiego filozofa rzeczywistość ewoluuje zgodnie z trzema zasadami: tychizmu, agapizmu i synechizmu. Zgodnie z zasadą tychizmu świat nie jest w pełni determinowany przez określone prawa. Jego rozwój łączy się z dozą przypadku i spontaniczności. Zasada agapizmu głosi z kolei, że siłą napędową ewolucji nie jest rywalizacja i walka, lecz miłość, troska i goto-

---

[18] H. Poincare, *Nauka i hypoteza*, przeł. M.H. Horwitz, G. Centnerszwer i S-ka, Warszawa 1908, s. 21–22.

[19] Por. ibidem, s. 24–25.

wość poświęcenia swego istnienia przez poszczególne byty dla dobra ogółu i wzrostu jego doskonałości. Synechizm w końcu oznacza, że wszelka zmiana (w szczególności rozwój świata) zachodzi w sposób ciągły. Ciągłość jest więc nieodłącznym elementem wszystkich aspektów rzeczywistości[20].

Zdaniem Peirce'a, prawdziwe kontinuum posiada tak wiele elementów, że ich ilość przewyższa każdą daną wielość. Prawdziwa ciągłość nie składa się z mnogości odrębnych jednostkowych elementów (gdyż każda mnogość jest określana przez konkretną liczbę), lecz jest czymś, co Peirce określa terminem „zbiór supermnogościowy" (*supermultitudinous collection*). Zbiór taki nie może być w pełni zdeterminowany i wyczerpany przez żadną wielość indywiduów. „Elementy" tworzące zbiór supermnogościowy są upakowane gęsto do tego stopnia, że zlewają się ze sobą i nie posiadają własnej indywidualności:

> Widzimy więc, że taki zbiór supermnogościowy trzyma się razem na mocy logicznej konieczności. Konstytuujące go indywidua nie są już dłużej oddzielnymi i niezależnymi przedmiotami. Nie istnieją one – nawet hipotetycznie – poza relacją, w jakiej znajdują się do siebie nawzajem. Nie są one przedmiotami, lecz wyrażeniami ukazującymi własności kontinuum.[21]

Zbiór supermnogościowy można też określić jako potencjalny agregat (*potential aggregate*), przy czym przez „potencjalny" Peirce rozumie niezdeterminowany (przez liczbę), ale zdolny do bycia zdeterminowanym[22]. Agregat ten nie składa się aktualnie z odrębnych indywiduów. Związana z nim jest jednak reguła, która umożliwia wyodrębnianie w nim określonych zbiorów elementów. Bez względu na to, jak wielki będzie zbiór punktów zdeterminowanych przy pomocy tej reguły, zawsze istnieje możliwość określenia (zaktualizowania) większego zbioru. Indywidualne, samoistne punkty otrzymywane w wyniku stosowania zasad determinacji w stosunku do linii geometrycznej są jedynie fikcyjnymi narzędziami, przydatnymi np. do dokonywania pomiarów[23]. Wyodrębnienie zbioru punktów, w ramach którego opisuje się linię, ma arbitralny charakter. Żaden z takich zbiorów nie jest tym, który konstytuuje kontinuum na fundamentalnym poziomie.

Zdaniem Buckleya, koncepcja ciągłości Peirce'a przynajmniej częściowo wywodzi się z refleksji amerykańskiego filozofa na temat doświadczanych przez człowieka ciągłych zjawisk, w szczególności czasu i przestrzeni. Człowiek nie doświadcza np. upływu czasu jako następujących po sobie, odrębnych chwil, lecz jako nieprzerwanego ciągu, w którym nie istnieją dyskretne, podstawowe elementy[24]. Prawdziwe kontinuum jako zbiór supermnogościowy nie może zostać

[20] Por. Ch.S. Peirce, *Synechism, Fallibilism and Evolution,* w: *Philosophical writings of Peirce*, Dover Publications, Nowy York 1955, s. 354–360.

[21] Ch.S. Peirce, *Philosophy of Mathematics. Selected Writings*, Indiana University Press, Bloomington 2010. s. 198 (przekład własny – M.S.).

[22] Por. ibidem, s. 185–186.

[23] Por. ibidem, s. 161.

[24] Por. B.J. Buckley, op. cit., s. 116.

w adekwatny sposób ujęte w ramach matematyki. Jego istotną cechą jest niemożność poddania się pełnej determinacji. Jak zauważa Buckley, głównym celem, który stawiał przed sobą Pierce, nie było zdefiniowanie matematycznego kontinuum, lecz wyjaśnienie natury synechizmu – jednej z metafizycznych zasad, w zgodzie z którą ewoluuje świat[25].

Franz Brentano

Punktem wyjścia rozważań Franza Brentano jest koncepcja kontinuum Arystotelesa[26]. Zgodnie z nią, kontinuum może dzielić się bez ograniczenia jedynie na kolejne kontinua. To, co ciągłe, nie składa się z dyskretnych elementów. W szczególności nie może być utworzone z nierozciągłych punktów. Wówczas bowiem punkty te musiałyby albo być oddzielone od siebie, albo stykać się ze sobą. W pierwszym przypadku istniałyby pomiędzy nimi luki i nie tworzyłyby kontinuum, w drugim – złożenie dowolnej ilości bezwymiarowych punktów dawałoby w efekcie następny nierozciągły punkt. Dwie rozciągłości tworzą razem kontinuum, gdy posiadają wspólną granicę (wspólny „punkt”). Granica ta nie istnieje aktualnie jako element tkwiący nieustannie w kontinuum, lecz jedynie potencjalnie. Zostaje ona zaktualizowana po wytypowaniu danego miejsca jako punktu, w którym łączą się dwie części kontinuum. Owe części również nie istnieją aktualnie konstytuując ciągłości, lecz aktualizują się dopiero po ich arbitralnym wyszczególnieniu.

Brentano rozróżnia kontinuum pierwszorzędne i drugorzędne. Pierwszorzędne jest samoistne, natomiast drugorzędne jest ufundowane na innym kontinuum. Pierwszorzędnym kontinuum jest czas, na którym opierają się wszystkie inne ciągłe obiekty. Z kolei barwa, która przechodzi w sposób ciągły z jednego odcienia w drugi, jest ugruntowana na kontinuum przestrzennym.

To, co teraźniejsze, nie istnieje jako wyizolowana, samoistna chwila. Jest związane konieczną, ciągłościową relacją z tym, co wcześniejsze i późniejsze od niego[27]. Podobny stan rzeczy zachodzi w przypadku kontinuum przestrzennego:

> [...] punkt należący do istniejącego jako całość kontinuum przestrzennego jest czymś [określonym] jedynie dzięki tej przynależności. Relacja ciągłościowa jest dla niego istotna: *Kto o nim myśli, musi ujmować go jako człon takiej relacji*, a kiedy myśli się o nim jako o należącym do pewnego istniejącego kontinuum przestrzennego, ta myśl obejmuje dane kontinuum nie tylko *in obliquo*, lecz w całości także *in recto*.[28]

[25] Por. ibidem, s. 122.

[26] Por. Arystoteles, *Fizyka*, (w:) idem, *Dzieła wszystkie*, t. 2, przeł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 2003, s. 131–133.

[27] Por. F. Brentano, *Psychologia z empirycznego punktu widzenia*, przeł. W. Galewicz, PWN, Warszawa 1999, s. 522.

[28] Ibidem, s. 525.

Człowiek, przedstawiając sobie w myślach przedmiot jako wchodzący w relację z innym przedmiotem, myśli o pierwszym z nich bezpośrednio – *in recto*, gdyż jest on podstawowym członem relacji, na który nakierowana jest myśl. O drugim, dopełniającym członie relacji myśli się *in obliquo*, czyli pośrednio – w takiej mierze, w jakiej wchodzi on w relację z członem podstawowym. Gdy np. myśli się, że Adam jest wyższy od Jana, to o Adamie myśli się wprost (*in recto*), zaś o Janie pośrednio (*in obliquo*) jedynie z tego względu, że Adamowi przypisuje się cechę bycia wyższym od Jana. Gdy myśli się o punkcie jako wchodzącym w skład kontinuum, to – ponieważ relacja przynależenia do kontinuum stanowi istotną cechę punktu, czyli podstawowego członu relacji – kontinuum jest ujmowane w myślach zarówno *in obliquo* (jako będące w relacji z punktem), jak i *in recto* (jako cecha konstytutywna punktu).

Zasadniczą cechą kontinuum jest to, że można wyróżnić w nim pokrywające się granice. Każdej granicy przysługuje cecha nazywana przez Brentano *plerosis*, czyli pełnia. *Plerosis* określa ilość kierunków, w których następuje ograniczanie przez daną granicę. Np. granica kontinuum czasowego może pełnić swą funkcję bądź w jednym kierunku (gdy jest tylko początkiem danego odcinka czasu), bądź w dwóch (gdy jest zarazem początkiem i końcem odcinków czasu). Gdy zachodzi ograniczanie we wszystkich możliwych dla danej granicy kierunkach (np. gdy granica znajduje się we wnętrzu sfery), posiada ona pełną *plerosis*. Gdy natomiast ograniczane są tylko niektóre kierunki (np. gdy granica znajduje się na powierzchni sfery), *plerosis* jest częściowa[29]. Granica istnieje tylko o tyle, o ile jest częścią kontinuum, o ile wchodzi w relacje z innymi jego częściami poprzez ich stanowienie ich granicy. Nie można oddzielić jej od relacji, w których się znajduje.

Podsumowanie

Matematycy i filozofowie, których poglądy na temat ciągłości zostały pokrótce omówione, reprezentują wspólne stanowisko, że ujęcie kontinuum przy pomocy liczb posiadających dyskretny charakter jest niemożliwe, gdyż zaprzecza samej istocie ciągłości. Każda część składowa, która rzeczywiście tkwi w kontinuum, jest jego lustrzanym odbiciem, zatem sama musi być równie ciągła jak owa całość, co oznacza, że jest także podzielna bez ograniczeń.

To nie kontinuum istnieje dzięki swym elementom, ale jego elementy istnieją nieautonomicznie, jedynie jako składowe, które można w nim wyodrębnić. Należenie do kontinuum, bycie w relacji do jego innych części, jest istotną własnością, bez której owe elementy nie mogą istnieć.

---

[29] Por. F. Brentano, *Philosophical Investigations on Space, Time and the Continuum*, przeł. B. Smith, Routledge, Nowy York 2009, s. 8.

Myśliciele przyznający nadrzędną rolę intuicji jako źródła warunkującego poznanie matematyczne nie zaprzeczali przydatności zarytmetyzowanego kontinuum Dedekinda i Cantora. Uznali jednak, że koncepcja kontinuum skonstruowanego poprzez wskazanie jego elementarnych, nierozkładalnych części składowych nie oddaje w adekwatny sposób właściwej natury ciągłości.

Literatura

Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, przeł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 2003.

Bell J.L., *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimerica, Mediolan 2006.

Bois-Reymond du P., *Die allgemeine Functionentheorie*, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung, Tubingen 1882.

Brentano F., *Psychologia z empirycznego punktu widzenia*, przeł. W. Galewicz, PWN, Warszawa 1999.

Brentano F., *Philosophical Investigations on Space, Time and the Continuum*, przeł. B. Smith, Routledge, Nowy York 2009.

Brouwer L.E.J., *Collected Works*, vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1975.

Buckley B.J., *The Continuity Debate: Dedekind, Cantor, du Bois-Reymond and Peirce on Continuity and Infinitesimals*, Docent Press, Boston 2012.

Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Hrsg. E. Zermelo, Springer-Verlag, Berlin 1932.

Dauben J.W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1990.

Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Brunszwik 1961.

Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych, przeł. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003.

From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, vol. I, W. Ewald (ed.), Oxford University Press, Oxford 2005.

Poincare H., *Nauka i hypoteza*, przeł. M.H. Horwitz, G. Centnerszwer i S-ka, Warszawa 1908.

Peirce C.S., *Philosophy of Mathematics. Selected Writings*, Indiana University Press, Blomington 2010.

Peirce C.S., *Philosophical Writings of Peirce*, Dover Publications, Nowy York 1955.

Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua, P. Ehrlich (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordlecht – Boston – Londym 1994.