

## Strategie szacowania miejsca liczb na osi u dzieci z dyskalkulią i typowo rozwijających się

Małgorzata Gut<sup>\*1</sup> (0000–0001–6540–7192)

Łukasz Goraczewski<sup>2</sup>

Karolina Finc<sup>3</sup> (0000–0002–0157–030X)

Jacek Matulewski<sup>3,4</sup> (0000–0002–1283–6767)

Anna Walerzak-Więckowska<sup>5</sup> (0000–0002–9643–6049)

Włodzisław Duch<sup>3,6</sup> (0000–0001–7882–4729)

### STRESZCZENIE

#### Cel

Celem badań była ocena wpływu deficytów poznawczych obecnych w specyficznym zaburzeniu w uczeniu się matematyki, na operowanie mentalną osią liczbową przy użyciu jednocyfrowych liczb prezentowanych w formie symbolicznej i niesymbolicznej.

#### Metoda

Zbadano zdolność szacowania miejsca liczb na osi (ang. *Number Line Estimation*, NLE) u 20 dzieci z zaburzeniami w zakresie nauki matematyki (*mathematical learning disabilities*, MLD) i 27 ich typowo rozwijających się rówieśników (*typically developing*, TD). Wykorzystano w tym celu zadanie szacowania miejsca liczb na osi dla liczb z zakresu 1–9 przedstawianych w formie symbolicznej i niesymbolicznej.

---

\* Autor korespondencyjny: Małgorzata Gut, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Instytut Psychologii, Wydział Filozofii i Nauk Społecznych, ul. Gagarina 39, 87–100 Toruń, Polska, e-mail: mgut@umk.pl.

<sup>1</sup> Instytut Psychologii, Wydział Filozofii i Nauk Społecznych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska.

<sup>2</sup> Bug Bomb Games Studio, Toruń, Polska.

<sup>3</sup> Interdyscyplinarne Centrum Nowoczesnych Technologii, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska.

<sup>4</sup> Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska.

<sup>5</sup> Instytut Psychologii, Wydział Nauk Społecznych, Uniwersytet Gdański, Polska.

<sup>6</sup> Katedra Informatyki Stosowanej, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska.

## Wyniki

W przypadku wszystkich dzieci większą wartość błędu szacowania uzyskano dla liczb ze środka osi liczbowej, aczkolwiek efekt był bardziej wyraźny w grupie z zaburzeniami. Co więcej, dzieci z obu grup w podobnym stopniu przeszacowywały, zaś różniły się pod względem niedoszacowywania miejsca liczb. Dzieci z grupy MLD ujawniły większe odchylenie w lewo niż dzieci z grupy TD w przypadku prawie wszystkich liczb, z wyjątkiem 7 i 8. Ocena wielkości błędu szacowania miejsca dla każdej liczby oddzielnie pozwoliła na opisanie profilu rozkładu wartości tego błędu, a co za tym idzie, prawdopodobnych strategii tego szacowania stosowanych przez dzieci z obu grup.

## Wnioski

Jak się wydaje, grupa MLD, przejawia tendencję do szacowania segmentów osi liczbowej, zaczynając od punktu odniesienia na lewym krańcu osi. Wyznaczanie kolejnego w jej centrum, nie ułatwia im poprawnego szacowania miejsca liczb 4 i 6. Ponadto u wszystkich dzieci odnotowano większy błąd szacowania w przypadku formatu niesymbolicznego (zbiory kropek), szczególnie dla wysokich wartości liczbowych, co można interpretować, zarówno jako przejaw błędów w szacowaniu miejsca liczb, jak i w przeliczaniu.

**Słowa kluczowe:** dyskalkulia, zależności numeryczno-przestrzenne, umiejętności matematyczne, mentalna oś liczbową, szacowanie miejsca liczb na osi.

## WPROWADZENIE

Dyskalkulia definiowana jest jako neurorozwojowe specyficzne trudności w uczeniu się, prowadzące do problemów w matematyce (American Psychiatric Association, 2013), które manifestują się trudnościami w nabywaniu podstawowych umiejętności matematycznych. Nie są one wynikiem niskiej inteligencji, innych zaburzeń rozwojowych czy ruchowych i neurologicznych deficytów (Butterworth, Varma, Laurillard, 2011; Kaufmann, von Aster, 2012). Dzieci z dyskalkulią, w porównaniu do dzieci typowo uczących się, popełniają więcej błędów w przeliczaniu obiektów, nazywaniu liczb, porównywaniu liczb i wykonywaniu działań arytmetycznych, jak również używają niedojrzałych strategii w zadaniach matematycznych, takich jak np. przeliczanie werbalne lub z pomocą palców (np. Geary i in., 2004; Mussolin, Mejias, Noël, 2010). Reprezentacja liczebności obiektów jest podstawową zdolnością w procesie rozwoju umiejętności arytmetycznych (Butterworth, 2010), a dzieci z dyskalkulią mają problem z wykonywaniem bardzo podstawowych zadań, takich jak określenie liczebności małych zbiorów (Landerl i in., 2004), porównywanie dwóch zbiorów kropek (Piazza i in., 2010), i wydobywanie podstawowych faktów arytmetycznych (Geary, 1993). Warto wspomnieć jednak, że nieprawidłowe wydobywanie faktów arytmetycznych można uznać za rezultat zaburzonej umysłowej reprezentacji liczb, ale też – skutek defektu w przetwarzaniu pamięciowym dotyczącym wydobywania faktów arytmetycznych (Geary, Bow, Yao, 1992).

Wielkości liczbowe posiadają przestrzenne reprezentacje, a to przestrzenne ugruntowanie liczb bazuje na metaforze Mentalnej Osi Liczbowej (ang. *Mental Number Line*, MNL, Restle, 1970; Dehaene, 1997), zgodnie z którą liczby są reprezentowane na kontinuum lewo-prawo. Ponadto liczby i przestrzeń są

wspólnie przetwarzane na poziomie neuronalnym (Capeletti, Muggleton, Walsh, 2009; de Hevia, Vallar, Girelli, 2008; Farnè, Rossetti, 2006; Fischer Shaki, 2014; Hubbard, Piazza, Pinel, Dehaene, 2005; Göbel, Calabria, Farnè, Rossetti, 2006; Sandrini, Rusconi, 2009). Co ważne, w obszarach mózgowych zaangażowanych w przetwarzanie numeryczno-przestrzenne wykazano anatomiczne i funkcjonalne nieprawidłowości u osób z dyskalkulią (np. Isaacs i in., 2001; Molko i in., 2003; Mussolin i in., 2009; Rotzer i in., 2008; Rykhlevskaia i in., 2009).

Chociaż zależność między umiejętnościami matematycznymi i przestrzennymi (Mix, Cheng, 2012; Wai, Lubinski, Benbow, 2009) wydaje się być bezsprzeczna i obszernie udokumentowana w literaturze, znacznie mniej wiadomo o kierunku tej relacji. LeFevre i współpracownicy (2013) wykazali w badaniach podłużnych, że u uczniów szkół podstawowych obecny jest wyraźny związek między umiejętnościami przestrzennymi, wiedzą o liczbach i zdolnościami w zakresie kalkulacji, jak również to, że poziom umiejętności wzrokowo-przestrzennych jest predykatorem wykonania zadań z operowaniem osią liczbową, aczkolwiek nie w przypadku umiejętności arytmetycznych czy przeliczania. Co więcej, niektóre badania wskazują, że dzieci z dyskalkulią i typowo rozwijające się nie różnią się w zakresie pamięci wzrokowo-przestrzennej, choć różnice między grupami pojawiają się po odbyciu treningu poznawczego opartego na osi liczbowej (McCaskey i in., 2018; Michels, O’Gorman, Kucian, 2018). Z drugiej strony, niektórzy badacze (Kucian i in., 2011; Michels i in., 2018) wykazali, że taki trening usprawniał szacowanie miejsca liczb na osi u prawidłowo rozwijających się dzieci i dzieci z dyskalkulią, ale nie wykazano korzystnego wpływu na roboczą pamięć przestrzenną u dzieci z dyskalkulią i bez.

Istnieje szereg różnych typów zależności numeryczno-przestrzennych (ang. *Spatial Numerical Associations*, SNA, przegląd Patro i in., 2014; Cipora, Patro, Nuerk, 2015), ponieważ informacja przestrzenna i numeryczna może wchodzić w interakcję na różne sposoby. Co ważne, nie wszystkie rodzaje SNA korelują z umiejętnościami arytmetycznymi; a nawet kiedy korelują, zależność ta nie jest oczywista (np. Bonato, Fabbri, Umiltà, Zorzi, 2007; Cipora, Nuerk, 2013; Georges, Hoffmann, Schiltz, 2017; Hoffmann, Mussolin, Martin, Schiltz, 2014; LeFevre i in., 2013). Jeden z typów SNA bazuje na reprezentacji relacji opartych na równych odstępach między liczbami i na umiejętności do mapowania odległości między liczbami na odległości przestrzenne. Dowody z badań eksperymentalnych i rozważania teoretyczne wskazują, że we wczesnym dzieciństwie takie mapowanie początkowo przyjmuje wzorzec logarytmiczny (MNL jest „skompresowana”, Dehaene, 1997), co prowadzi do tendencji do przeszacowywania miejsca niskich liczb i niedoszacowywania miejsca liczb wysokich, podczas gdy w późniejszych latach szkolnych, ten wzorzec przechodzi w bardziej linearny (Ashcraft, Moore, 2012; Booth, Siegler, 2006; Roudier, Geary, 2014). Typowym zadaniem do pomiaru tego rodzaju SNA jest szacowanie miejsca liczb na osi (ang. *Number Line Estimation*, NLE), w którym osoby badane proszą się o oszacowanie lokalizacji przestrzennej wskazanej liczby na pustej osi liczbowej (bez podziałki i liczb). W niektórych wariantach tego zadania, oś liczbową zawiera liczbę początkową i końcową, zazwyczaj 0 i 100 (lub 1000). W innych wariantach zadaniem badanego jest wskazać lokalizację zadanej liczby przy użyciu osi liczbowej wyłącznie

z liczbą początkową (np. 0) oraz z dodaną wskazówką odnośnie skali osi (np. jaka długość części osi oznacza wartość 1 albo 10). Taki odcinek referencyjny zwykle wskazywany jest tuż pod pustą osią liczbową (Link, Huber, Nuerk, Moeller, 2014). Tradycyjnie zakłada się, że zdolność do lokalizacji przestrzennej liczb odzwierciedla kształt liczbowej reprezentacji MNL (por. dyskusję poniżej), a dopasowanie liczby do jej miejsca (liniowe lub nie) zależy od etapu rozwoju poznawczego lub od deficytów w zakresie matematyki (Ashcraft, Moore, 2012). Wzorzec logarytmiczny MNL, typowy dla młodszych dzieci stwierdzono także u dzieci z problemami w zakresie matematyki (Geary, Hoard, Nugent, Bailey, 2012). Reprezentacja liniowa przejawiająca się w precyzyjnym szacowaniu miejsca liczb na osi jest interpretowana jako wyraźny predyktor przyszłych kompetencji matematycznych (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, Zorzi, 2010; Booth Siegler, 2006; Geary, 2011).

Jednakże, takie rozwojowe przejście z wzorca logarytmicznego do liniowego (ang. *log-to-linear representation shift*) jest jedną z teoretycznych koncepcji, które są dyskutowane w literaturze (zob. Cohen Quinlan, 2018; Luwel, Peeters, Dierckx, Elke Sekeris, Verschaffel, 2018; Sasanguie, Verschaffel, Reynvoet, Luwel, 2016). Co więcej twierdzi się, że wzorce logarytmiczny i linearny w wykonaniu zadania NLE nie dostarczają danych na temat psychologicznych reprezentacji liczb (Cohen, Quinlan, 2018). Dowiedziono, że wykonanie takiego zadania zależy od stosowania strategii bazujących na punktach referencyjnych (ang. *benchmarks*). Ponadto poszczególne strategie wykorzystujące takie punkty odniesienia można badać zarówno u dzieci, jak i dorosłych wykonujących zadanie NLE. To alternatywne podejście koncentruje się na roli wspomnianych strategii w wykonaniu NLE (np. Barth, Palladino, 2001). Na przykład dorośli używają strategii opartych na stosowaniu proporcji/odejmowaniu do oszacowania miejsca liczby na osi, tj. poprzez oszacowanie lokalizacji liczby jako proporcji do całkowitej długości osi albo poprzez odjęcie tej liczby od prawego krańca osi (Cohen, Blanc-Goldhammer, 2011; Hollands, Dyre, 2000). Taki sposób wykonania zadania NLE raportowano także u starszych dzieci (Barth, Palladino, 2011). Uważa się, że krzywa wykonania NLE opartego na tej strategii koreluje z reprezentacją ilości/liczb. W przeciwieństwie do wzorca logarytmiczno-liniowego krzywej szacowania miejsca liczb na osi, strategia oparta na punktach odniesienia jest dopasowana do modelu bazującego na cyklicznym wyznaczaniu proporcji na osi (ang. *cyclic power model*), który charakteryzuje lepsze dopasowanie w przypadku wykonania zadania NLE ze wskazaną wartością liczbową na początku i końcu (tzw. *bounded NLE task*, Cohen, Blanc-Goldhammer, 2011; Cohen, Quinlan, 2018). Ścisłej mówiąc, najpierw bazujemy na liczbie początkowej osi (punkt referencyjny) i model oparty na prostej funkcji najlepiej wyjaśnia sposób szacowania miejsca liczb na osi. Później szacujemy na podstawie proporcji przy użyciu punktu początkowego i końcowego osi, co oznacza, że dzieci dzielą całą oś liczbową na połowy. W rezultacie szacowanie jest bardziej precyzyjne wokół punktu środkowego osi, podczas gdy lokalizowanie poniżej tego punktu charakteryzuje przeszacowywanie (lokalizowanie miejsca liczby za bardzo na prawo), a tych powyżej – niedoszacowywanie (lokalizowanie za bardzo na lewo). Taki kształt krzywej funkcji szacowania (dopasowania rzeczywistego miejsca liczby do miejsca oszacowanego) może być

wyjaśniony przez model oparty na krzywej jedno-cyklicznej. Podsumowując, szacowanie w tej sytuacji jest oparte na środkowym punkcie referencyjnym i dwóch punktach pomiędzy środkiem i krańcem osi (ulożonych w kwartylach całej osi); w tym przypadku wyniki wykonania zadania NLE mogą być wyjaśniane przez model oparty na funkcji potęgowej dwu-cyklicznej. Inny problem, podnoszony w dyskusji dotyczącej korelacji między wykonaniem NLE i rozwojem reprezentacji liczb/wielkości dotyczy różnorodności zadań, bodźców i podejść w analizie w badaniach nad tą zależnością (zob. Ebersbach, Luwel, Verschaffel, 2013). To zróżnicowanie dodatkowo komplikuje i tak już niejasny obraz wyników. W konsekwencji, trudno jest porównywać ze sobą wyniki poszczególnych badań opisywanych w literaturze.

Podsumowując, jest bardzo wiele danych z badań dotyczących problemów z przeliczaniem, porównywaniem liczb, szacowaniem liczebności czy wydobywaniem faktów arytmetycznych u osób z dyskalkulią (zob. Butterworth, 2003, opisujący metody używane jako testy przesiewowe do diagnozy dyskalkulii), zaś kwestia szacowania miejsca liczb na osi zdaje się nie być badana w wystarczającym stopniu (lub co najmniej obszernie dyskutowana), szczególnie w odniesieniu do specyficznych metod używanych do pomiaru tej umiejętności, poza badaniem szeregu innych czynników (zob. Ashcraft, Moore, 2012; Ebersbach i in., 2013). Kolejny problem stanowi to, że większość badań nad NLE wykorzystuje osie liczbowe ograniczone na krańcach wartościami 0 i 100 (lub nawet 0 i 1000) jako punktów referencyjnych, więc brakuje danych z badań dotyczących szacowania pozycji bardzo podstawowych liczb jednocyfrowych u dzieci wykazujących deficyty w nauce matematyki (pomimo pewnych prób tworzenia takich metod, jak w przypadku jednej z nich opisanej np. przez Cangoz, Altun, Olkun, Kacar, 2013; aczkolwiek autorzy ci nie raportują w swojej publikacji wyników badań z użyciem opisanego narzędzia). Jest charakterystyczne i zaskakujące, że dotychczasowe badania nie koncentrowały się na szacowaniu miejsca liczb na osi z zastosowaniem tak prostych zadań z użyciem liczb jednocyfrowych, a badano tę zdolność jedynie w oparciu o wyższe wartości liczbowe. Co więcej, w niektórych badaniach szacowanie miejsca liczb na osi było badanie za pomocą metod papier-olówek (a nawet w taki sposób, że np. jedna grupa była testowana metodą papierową, zaś druga – zadaniem komputerowym – zob. Geary, Hoard, Nugen, Byrd-Craven, 2008). I wreszcie w przypadku większości badań stosowano wyłącznie liczby w formacie arabskim jako bodźce w zadaniach (co jest uzasadnione wykorzystaniem osi liczbowych z zakresu 0–100 i 0–1000).

W naszych badaniach podjęliśmy próbę odpowiedzi na następujące pytanie: czy wpływ deficytów w zakresie matematyki na szacowanie miejsca liczb na osi u dzieci może być widoczny w tak prostym zadaniu? Mówiąc ściślej, użyliśmy krótkiej osi liczbowej ograniczonej liczbami 1 i 9 i dwóch formatów liczb (symbolicznego i niesymbolicznego). Szczegółowe pytania badawcze były następujące: Czy można stwierdzić jakiegokolwiek różnice pomiędzy typowo rozwijającymi się dziećmi i tymi z niskim poziomem umiejętności matematycznych w odniesieniu do przeszacowywania i niedoszacowywania miejsca poszczególnych wartości liczbowych? Co te różnice mogą powiedzieć na temat wykonania zadania NLE u każdej z tych grup? Czy wykonanie tego zadania jest zależne od formatu liczby?

Z jednej strony dzieci z dyskalkulią przejawiają szereg problemów w przetwarzaniu liczb w formie symbolicznej. Z drugiej strony, charakteryzuje je deficyt w zakresie przeliczania obiektów czy szacowania liczebności, co może być dodatkowo powiązane z deficytem przetwarzania wzrokowo-przestrzennego lub obciążania pamięci roboczej liczebnościami zbiorów kropek.

Szereg argumentów przemawia za zastosowaniem w naszych badaniach osi liczbowej w zakresie od 1 do 9. Po pierwsze, interesowało nas, czy spodziewane różnice między grupami badanych ujawnią się nawet w przypadku tak wąskiego zakresu liczb jednocyfrowych. Po drugie, problematyczne byłoby dla badanych przeliczać zbiory kropek o liczbie z zakresu 0–100 (np. poprawnie przeliczyć 45, 77 lub 98 kropek w celu oszacowania miejsca tej liczby na osi). Uściślając, zastosowanie przedziału liczbowego 1–9 pozwala uniknąć konieczności przeliczania dużej liczby kropek (w zakresie 0–100) oraz rzucić pewne światło na potencjalne różnice zależne od czynnika format liczby. Po trzecie, z dwóch powodów nie użyliśmy w badaniu liczby 0 i 10, które stosowano w dotychczasowych badaniach z użyciem krótkich osi liczbowych (z małym przedziałem liczbowym). Wydaje się być bezdyskusyjne, że dzieci w tym wieku mają utrwaloną reprezentację liczby zero (oraz pustych zbiorów, „braku obiektów”, „niczego”), jak również wiedzą, jak jej użyć w formie zarówno symbolicznej i niesymbolicznej (np. Krajcsi i in., 2017; Merrit, Brannon, 2013; Wellman, Miller, 1986). Ponadto umysłowa reprezentacja liczby „0” posiada swoje neuronalne korelaty w sieci ciemieniowo-czołowej (Rinaldi, Girelli, 2016). W naszych obecnych badaniach liczba „0” byłaby jednak problematyczna w zadaniu z użyciem formatu niesymbolicznego – brak kropek w tym rodzaju zadania oznaczałby pusty czarny ekran z samą osią liczbową. Innymi słowy, próbki z liczbą „0” reprezentowaną pustym ekranem mogłyby być dezorientujące dla dzieci. Z drugiej strony zaś zastosowanie osi liczbowej 1–10 skutkowałoby brakiem możliwości wyznaczenia wyraźnego środkowego punktu referencyjnego (środką osi). W zastosowanych przez nas zadaniach punkt centralny osi to liczba 5. W przypadku osi 1–10 ten środek byłby lokalizowany pomiędzy „5” i „6”. W rezultacie, dzięki zastosowaniu wąskiego przedziału wartości liczbowych, możliwe było analizowanie i przedyskutowanie błędów szacowania miejsca dla każdej liczby szczegółowo.

Przewidywaliśmy, że nawet w tak prostym zadaniu NLE, błąd szacowania będzie ogólnie większy w grupie dzieci z niskim poziomem umiejętności matematycznych, niż u dzieci typowo rozwijających się, pomimo liniowej funkcji szacowania miejsca liczb na osi u obu grup dzieci w tym wieku uczestniczących w naszym badaniu (zob. Geary i in., 2008). Co więcej, zakładaliśmy, że różnice będą obecne w szacowaniu na osi liczbowej w obu zadaniach (z użyciem liczb symbolicznych i niesymbolicznych), z uwagi na dodatkowy problem z przeliczaniem kropek w grupie dzieci z problemami w nauce matematyki. A zatem, wyniki naszych badań mogą dostarczyć pewnych wartościowych danych dotyczących przetwarzania osi liczbowej jednocyfrowych liczb u dzieci z ryzykiem dyskalkulii w porównaniu do dzieci prawidłowo rozwijających się. Różnice w poziomie błędu szacowania miejsca liczb na osi pomiędzy grupami badanych, będące przedmiotem naszego zainteresowania, mogą wiele wniesić do aktualnego stanu wiedzy, szczególnie w kontekście dyskusyjnej kwestii zasugerowanej ostatnio przez Sella, Sasanguie

i Reynvoeta (2020). Badali oni umiejętność określania kolejności liczb z zakresu 1–9, które prezentowane były trójkami (np. 7–8–9) i na podstawie uzyskanych wyników sformułowali wnioski, że przetwarzanie kolejności niskich wartości liczbowych prezentowanych w formacie symbolicznym, zdaje się być przejawem nie tyle rozwoju MNL, ale raczej efektem znajomości (ang. *familiarity*) związanej z codziennymi doświadczeniami w operowaniu takimi trójkami liczb jak 1–2–3 czy 3–6–9, przechowywanymi w pamięci długotrwałej. Chociaż ich badania zostały przeprowadzone z udziałem młodych dorosłych, mogą one sugerować, że podobny wzorzec może być obserwowany również u dzieci, zarówno z dyskalkulią i typowo rozwijających się, ponieważ obie grupy są zaznajomione z tego typu trójkami liczb jakich użyli w badaniach Sella i współpracownicy. Z tego powodu można się spodziewać braku różnic między grupami w operowaniu osią liczbową 1–9.

## METODY

### Uczestnicy

W badaniu wzięło udział czterdzieścioro siedmioro dzieci (24 dziewczynki i 23 chłopców, średnia wieku = 13,6 lat; zakres wieku 9,83–16,58 lat). Dwadzieścioro z nich przejawiało trudności w zakresie matematyki (11 dziewczynek i 9 chłopców, średnia wieku to odpowiednio: 13,36 i 12,96 lat), zaś 27 dzieci (13 dziewczynek i 14 chłopców, średnia wieku odpowiednio: 14,96 i 12,95 lat) stanowiło grupę o typowym poziomie umiejętności matematycznych (grupa kontrolna). Pierwsza grupa została zaklasyfikowana jako dzieci z trudnościami w nauce matematyki (grupa MLD; podobnie jak to uczynili Geary i in., 2008) zaś druga – jako grupa dzieci typowo rozwijających się (grupa TD). Średnia wieku w grupach MLD i TD to odpowiednio: 13,2 i 12,9 lat. Średnie wieku obu grup nie różniły się od siebie istotnie ( $t(45) = 1,23; p > 0,05$ ), jak również nie było istotnej różnicy między liczebnością chłopców i dziewczynek ( $\chi^2(1) = 0,21; p > 0,05$ ).

Uczestnicy badań byli uczniami szkół podstawowych z województw kujawsko-pomorskiego i pomorskiego w Polsce. Wszyscy odebrali w szkole typową edukację matematyczną. Do grupy MLD dzieci zakwalifikowano ze wskazania psychologów z poradni psychologiczno-pedagogicznych, w oparciu o standardowo przyjęte tam kryteria diagnostycznych, uwzględniające np. inteligencję ogólną w zakresie normy, niski wynik (poniżej 8 punktów) w podskali Arytmetyka w Skali Inteligencji Wechslera dla Dzieci (Intelligence Scale for Children-Revised, WISC-R; Wechsler, 1974), poziom umiejętności matematycznych osiągniętych w szkole i obserwacje psychologa. Co ważne, większość dzieci w grupie MLD nie miało postawionej diagnozy dyskalkulii, ponieważ w Polsce ten deficyt można diagnozować dość późno, z końcem edukacji w szkole podstawowej. W związku z tym, większość osób badanych otrzymało diagnozę ryzyka dyskalkulii. Z tego powodu są oni opisani jako grupa z trudnościami w nauce matematyki (grupa MLD) a nie jako grupa dzieci z dyskalkulią. Rodzice uczestników wyrazili zgodę na udział dzieci w badaniu. Procedura badawcza uzyskała zgodę lokalnej komisji

ds. etyki przy Collegium Medicum Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu (numer decyzji: KB 99/2018). Wszyscy badani byli zdrowi, nie mieli problemów neurologicznych oraz cechowali się prawidłowym, lub skorygowanym do prawidłowego, wzrokiem.

## Zadania i bodźce

Procedura badawcza była podzielona na dwa zadania: pierwsze z użyciem liczb w formacie symbolicznym i drugie z liczbami w formacie niesymbolicznym, których miejsce miało być określane na osi liczbowej. Kolejność zadań nie była losowa (każdy badany wykonywał najpierw zadanie z formatem symbolicznym, a następnie to z formatem niesymbolicznym). Każdy bodziec (zob. rysunek 1) składał się z horyzontalnie zorientowanej osi liczbowej pozbawionej wskaźników dla poszczególnych liczb (z wyjątkiem początkowej i końcowej pozycji, oznaczonych odpowiednio jako „1” i „9”). Linia osi liczbowej stanowiła połowę długości ekranu, tj. 960 pikseli na ekranie 1920 × 1080 pikseli. Oś liczbową była ułożona horyzontalnie względem środka ekranu i wyświetlana w odległości 3/4 (od góry) wysokości ekranu. W przypadku każdego bodźca, biała strzałka (o wysokości równej 1/9 wysokości ekranu) była prezentowana bezpośrednio nad linią i wskazywała lokalizację określaną przez dziecko. Ponad linią i strzałką wyświetlała się liczba (w formacie arabskim w pierwszym zadaniu i jako zbiór kropek w drugim zadaniu) na wysokości 4/10 (od góry) wysokości ekranu i nad środkiem osi liczbowej. W każdej próbie (bodźcu) liczba prezentowana nad osią była wartością liczbową z zakresu od 1 do 9 i wyświetlana była białą czcionką (RGB 230, 230, 230). Wszystkie bodźce prezentowane były na czarnym tle (RGB 25, 25, 25). Kontrast między obydwoma barwami (tła i bodźców) został zredukowany w celu uniknięcia zmęczenia oczu i efektu powidoków.



Rysunek 1. Przykłady bodźców użytych w zadaniach

W zadaniu z użyciem symbolicznego formatu liczb, cyfra w każdym bodźcu miała wysokość 222 pikseli, zaś szerokość pomiędzy 152 a 200 pikseli, zależnie od wartości liczbowej (np. 152 piksele w przypadku cyfry 1). W zadaniu z użyciem formatu niesymbolicznego każdy bodziec składał się ze zbioru kropek. Średnice i pozycja przestrzenna poszczególnych kropek w zbiorze były tak dobierane przez



program, aby we wszystkich powtórzeniach były takie same: średnia całkowita powierzchnia zajmowana przez kropki, powierzchnia i obwód otoczki wypukłej kropki (obrysu pokrycia tła przez kropki), ich zagęszczenie (stosunek powierzchni kropek do powierzchni otoczki wypukłej), punkt środkowy oraz środek obliczany z wagami równymi powierzchni poszczególnych kropek; różnice w zakładanych parametrach nie przekraczały 2% (por. Gebuis, Reynvoet, 2011). Przykłady bodźców przedstawiono na rysunku 1. Kolejność zadań była taka sama dla wszystkich badanych, ale kolejność liczb w zadaniu była losowa. Każda liczba zastosowana w zadaniu była powtórzona cztery razy (co daje 36 próbek w zadaniu i 72 próbki w całej procedurze badawczej). W przypadku każdej próbki uczestnicy byli proszeni o oszacowanie miejsca liczby na wyświetlonej osi liczbowej (tzw. dopasowanie liczby do miejsca, ang. *number-to-position NLE task*) poprzez kliknięcie lewym przyciskiem standardowej myszy komputerowej we właściwe dla tej liczby miejsce na osi. Nie było limitu czasu na wykonanie zadania, więc dzieci były instruowane aby oszacować lokalizację liczby z możliwie największą precyzją, bez presji czasu. Błąd szacowania był obliczany jako stosunek całkowitej liczby pikseli pomiędzy miejscem wskazanym przez dziecko a miejscem poprawnej lokalizacji liczby do długości całej osi liczbowej (również mierzonej w pikselach) i wyrażony w procentach. Każde zadanie składało się z 36 próbek (każda liczba powtarzała się 4 razy), a kolejność próbek była zrandomizowana.

Chociaż w dotychczasowych badaniach nad NLE uczestnicy nie szacowali miejsca liczb wyświetlanych na tej osi (tj. 1 i 9), należy podkreślić, że w tych badaniach zadania NLE zawierały wyłącznie liczby prezentowane w formacie symbolicznym (arabskim). Z tego powodu uczestnicy naszych badań byli proszeni o wskazywanie pozycji wszystkich liczb z przedziału 1–9, pomimo faktu, że zarówno 1, jak i 9 były widoczne na krańcach osi. Choć w zadaniu z formatem cyfr arabskich wyświetlanych nad osią wydaje się to być pozbawione sensu, to w zadaniu z kropkami prezentowanymi nad osią dzieci musiały najpierw przeliczyć kropki lub dokonać ich subitacji (w przypadku małych zbiorów obiektów, ich liczba może być określana szybko i „na oko” bez konieczności procesu przeliczania) a następnie zlokalizować miejsce liczby reprezentowanej przez kropki na linii. A zatem możemy założyć, że każdy możliwy błąd szacowania zaobserwowany dla liczby 9 w zadaniu z kropkami był raczej rezultatem błędów w przeliczaniu kropek lub bazowania na umiejętności szacowania liczebności kropek. Dla pewności, że oba zadania są identyczne, a różniące się tylko pod względem formatu liczby, prosiliśmy badanych o szacowanie miejsca liczb 1 i 9 w obu zadaniach (tj. z użyciem cyfr arabskich i kropek). Pozwoliło to na sprawdzenie wpływu formatu liczby na wykonanie zadania.

## Aparatura i oprogramowanie

Uczestnicy podczas badania siedzieli wygodnie ok. 60 cm na wprost od monitora komputera przenośnego. Bodźce były prezentowane na ekranie LCD o przekątnej 13,3” i rozdzielczości 1920 × 1080 pikseli oraz częstotliwości odświeżania 60 Hz. Badani odpowiadali klikając w lewy klawisz standardowej komputerowej myszy.

Prezentacja bodźców i zapisywanie odpowiedzi uczestników było kontrolowane za pomocą testu komputerowego Prokalkulia 6–9, zaprogramowanego i wdrożonego w naszym zespole (Gut, Goraczewski, Matulewski, 2016). Został on przygotowany przy użyciu Microsoft Visual Studio 2013 Enterprise w środowisku języka C#. Program wymagał platformy programistycznej NET Framework 4 Client Profile oraz systemu operacyjnego co najmniej Windows 7.

## Analizy statystyczne

Ze względu na nierównoliczne grupy, niezbliżony do normalnego rozkład wartości zmiennej i wartości odstające, zastosowano metodę statystyczną do porównania grup MLD i TD redukującą wpływ przypadków odstających (Field, Miles, Field, 2012; Field Wilcox, 2017). Przeprowadzono analizy wariancji (ANOVA)  $2 \times 2$  w schemacie mieszanym dla przyciętych o 20% średnich (ang. *with the 20% trimmed means*), aby zanalizować różnice międzygrupowe w poziomie błędu szacowania, przeszacowywania i niedoszacowywania miejsca liczb na osi (Wilcox, 2012). Grupa (MLD/TD) stanowiła zmienną (czynnik) międzyobiektową, zaś format liczby (symboliczny/niesymboliczny) – zmienną wewnątrzobiektową. Analizy danych na średnich przyciętych o 20% osiągają podobną moc statystyczną jak analizy dla średnich z prób o rozkładzie normalnym; przy istniejących wartościach odstających, mają one również mniejszy błąd standardowy (Mair, Wilcox, 2016). Do przeanalizowania różnic między grupami w odniesieniu do poszczególnych przedziałów liczbowych (liczb 2 i 3 definiowanych jako niskie, 4–6 jako środkowe oraz 7 i 8 jako wysokie), zastosowano analizy wariancji  $2 \times 2 \times 3$  z odcięciem 20% średnich z uwzględnieniem dodatkowego czynnika poziomu wartości liczbowej (niska, średnia, wysoka). Analogicznie, różnice między grupami w poziomie zmiennej zależnej w odniesieniu do poszczególnych wartości liczbowych (od 1 do 9) przetestowano przy użyciu analizy wariancji  $2 \times 2 \times 9$  dla przyciętych o 20% średnich, z uwzględnieniem dodatkowego czynnika – wartości liczbowej (1–9). Do analizy efektu interakcji, wykonano porównania w parach bazujące na M-estymatorach i metodzie bootstrapping z 2000 prób oraz z korektą na wielokrotne porównania (ang. family discovery rate, FDR, Benjamini, Hochberg, 1995). Wszystkie analizy zostały przeprowadzone z wykorzystaniem języka R oraz pakietów WRS2 przeznaczonych do analizy wariancji oraz rcompanion przeznaczonych do porównań w parach (Mair, Wilcox, 2016).

## WYNIKI

### Wpływ czynników na wielkość błędu szacowania

Aby sprawdzić wpływ grupy (MLD vs. TD) i formatu wyświetlanych liczb (symboliczny vs. niesymboliczny) na średni błąd szacowania miejsca (Estimation Error, EE), przeprowadzono dwuczynnikową analizę wariancji (ANOVA) w schemacie

mieszanym. Dane uzyskane z próbek dla liczb 1 i 9 zostały wykluczone z tej analizy, ponieważ obie te liczby są wyświetlane na ekranie jako krańcowe punkty osi liczbowej. Założono więc niską wartość EE dla tych liczb, będącą rezultatem bezpośredniej ich prezentacji na osi liczbowej, a w konsekwencji to, że EE dla 1 i 9 będą zaniżać średnie wartości obliczane dla wszystkich liczb razem.

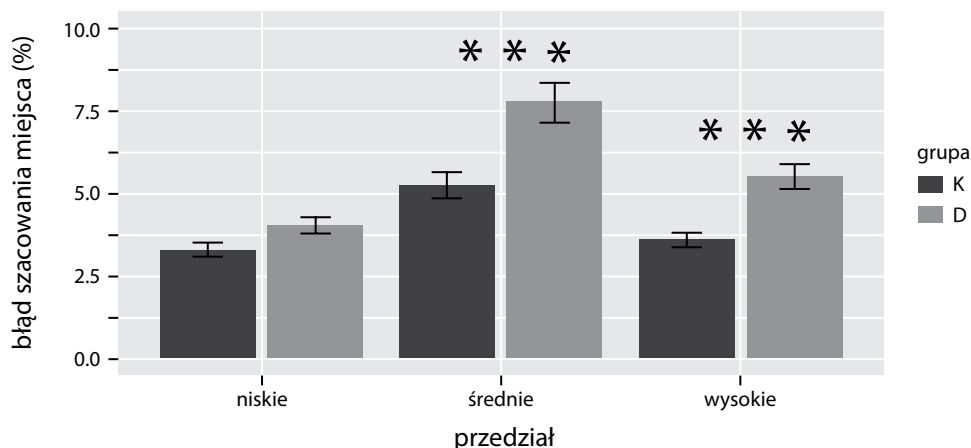
Analiza dla zmiennych grupa i format ( $2 \times 2$ ) jako czynnika międzyobiektowego (zmienna grupa) i wewnątrzobiektowego (zmienna format) oraz wielkości EE jako zmiennej zależnej, wykazała istotny efekt grupy,  $F(1, 45) = 12,29$ ,  $p < 0,01$ , z wyższym EE w grupie MLD (4,86%) niż TD (3,49%). Uzyskano także istotny efekt główny dla czynnika format,  $F(1, 45) = 7,11$ ,  $p < 0,001$ , z niższym EE w zadaniu z symbolicznym formatem liczb (3,84%) niż w tym z formatem niesymbolicznym (4,51%). Nie wykazano istotnej interakcji między czynnikami. Jednakże, dodatkowe analizy różnic między grupami oddzielnie dla formatu symbolicznego i niesymbolicznego liczb, wykazały, że w przypadku formatu niesymbolicznego średnie EE było niższe w grupie kontrolnej (TD) niż w grupie MLD ( $p < 0,01$ ), jak również ten sam efekt uzyskano w przypadku formatu symbolicznego ( $p < 0,05$ ).

W celu zanalizowania wpływu grupy, formatu wyświetlanej liczby i przedziału liczbowego: niskie (2 i 3), środkowe (4, 5 i 6), oraz wysokie wartości liczbowe (7 i 8) na średnie EE, wykonano trójczynnikową analizę ANOVA. Użyto w niej grupy (2), formatu (2), i przedziału liczbowego (3) jako czynników między- i wewnątrzobiektowych oraz EE jako zmiennej zależnej. Analiza wykazała istotny efekt główny dla grupy,  $F(1, 45) = 37,09$ ,  $p < 0,001$ , z wyższym EE zaobserwowanym w grupie MLD niż w grupie TD (podobnie jak w dwuczynnikowej analizie wariancji opisanej wyżej). Format liczby również ujawnił istotny efekt główny,  $F(1, 45) = 5,76$ ,  $p < 0,05$ , z niższym EE w zadaniu z formatem symbolicznym niż w zadaniu z niesymbolicznym formatem liczby (tak samo, jak w opisanych wyżej wynikach dwuczynnikowej analizy wariancji). Dodatkowo, przedział liczbowy miał istotny wpływ,  $F(2, 90) = 58,22$ ,  $p < 0,01$  na zmienną zależną. Porównanie średnich wartości EE uzyskanych dla każdego przedziału liczbowego (niskich, środkowych, wysokich wartości liczbowych) wykazało istotne różnice w poziomie EE między niskimi (3,61%) i środkowymi przedziałami wartości liczbowych (6,33%,  $p < 0,001$ ), między środkowymi i wysokimi (4,42%,  $p < 0,001$ ), oraz między niskimi i wysokimi ( $p < 0,01$ ). Ponadto wykazaliśmy istotną interakcję między przedziałem liczbowym i grupą,  $F(2, 90) = 7,56$ ,  $p < 0,05$  (zob. rysunek 2, s. 50) oraz między formatem liczby i przedziałem liczbowym,  $F(2, 90) = 10,03$ ,  $p < 0,05$  (zob. rysunek 3, s. 50).

Jak widać na rysunku 2, w przypadku środkowych wartości liczbowych, zaobserwowano większy EE w grupie MLD niż w TD ( $p < 0,001$ ); ten sam efekt pojawił się dla wysokich wartości liczbowych ( $p < 0,001$ ). Różnice między grupami w odniesieniu do niskich wartości liczbowych były nieistotne.

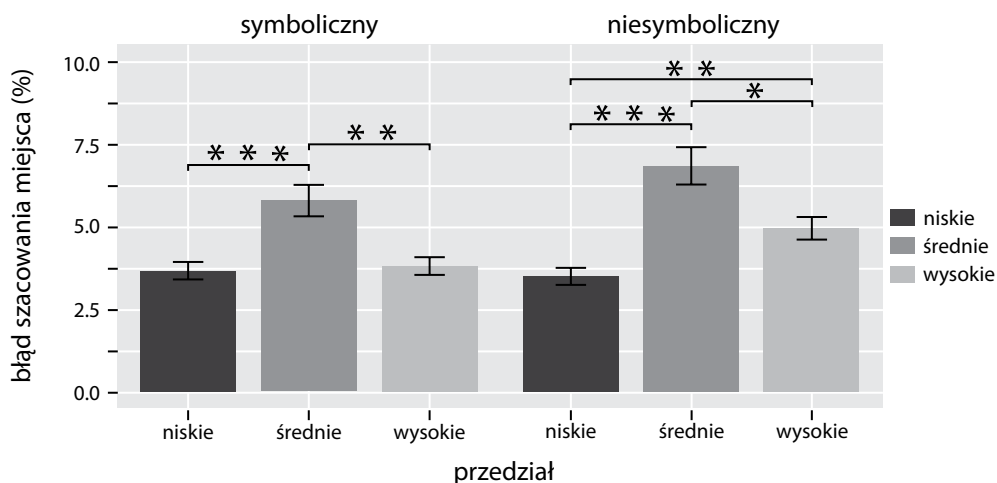
Jak widać na rysunku 3, w przypadku formatu symbolicznego, porównania ujawniły istotne różnice między EE dla niskich (3,78%) i środkowych wartości liczbowych (6%,  $p < 0,001$ ), jak również między EE dla środkowych i wysokich liczb (3,94%,  $p < 0,01$ ). Różnice między EE dla liczb niskich i wysokich były nieistotne. W przypadku formatu niesymbolicznego istotne efekty odnotowano

w odniesieniu do liczb niskich (3,56%) w porównaniu ze środkowymi (7,03%,  $p < 0,001$ ), w różnicy między liczbami środkowymi i wysokimi (5,18%,  $p < 0,05$ ) oraz między EE dla liczb niskich i wysokich ( $p < 0,01$ ). Żadne z pozostałych interakcji nie osiągnęły poziomu istotności statystycznej.



**Rysunek 2.** Interakcja między grupą i przedziałem liczbowym w średnim błędzie szacowania miejsca

**NOTA:** Wartości średnie przedstawiają słupki; na wykresie widoczne są także wartości błędu standardowego średniej (SEM); K – grupa kontrolna, D – grupa z deficytem w zakresie matematyki.



**Rysunek 3.** Interakcja między formatem liczby i przedziałem liczbowym w średnim błędzie szacowania miejsca

**NOTA:** Wartości średnie przedstawiają słupki; na wykresie widoczne są także wartości błędu standardowego średniej (SEM); K – grupa kontrolna, D – grupa z deficytem w zakresie matematyki.

## Wpływ czynników na niedoszacowanie i przeszacowanie miejsca liczb na osi

Aby sprawdzić wpływ grupy i formatu liczb na średnią wartość niedoszacowania (*underestimation error*, UE) czyli lokalizacji na lewo od właściwego miejsca liczby, wykonano dwuczynnikową analizę wariancji (ANOVA) ze zmiennymi: grupa i format ( $2 \times 2$ ) jako czynnikami międzyzobiekto- wym i wewnątrzobiekto- wym oraz UE jako zmienną zależną. Analiza wykazała istotny efekt grupy,  $F(1, 45) = 13,78$ ,  $p < 0,01$ , ujawniając istotnie wyższy UE zaobserwowany w grupie MLD (5,84%) niż w grupie kontrolnej (TD, 4,02%). Nie wykazano interakcji między czynnikami oraz istotnego efektu głównego dla formatu.

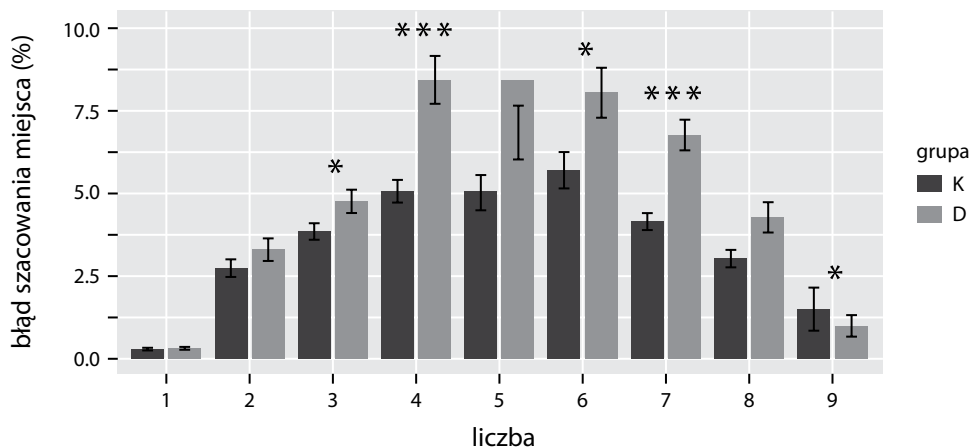
W celu sprawdzenia wpływu grupy, formatu i przedziału liczbowego na średnie wielkości niedoszacowania, wykonano trójczynnikową analizę wariancji z grupą jako czynnikiem międzyzobiekto- wym, formatem liczby i przedziałem liczbowym jako czynnikami wewnątrzobiekto- wymi ( $2 \times 2 \times 3$ ) oraz UE jako zmienną zależną. Analiza wykazała istotny efekt główny grupy,  $F(1, 45) = 34,76$ ,  $p < 0,001$ , z wyższym UE zaobserwowanym w grupie MLD niż TD (podobnie jak pokazała to dwuczynnikowa ANOVA opisana wyżej). Istotny efekt główny wykazano też dla przedziału liczbowego,  $F(2, 90) = 51,94$ ,  $p < 0,01$ . Porównanie wartości UE dla niskich, środkowych i wysokich liczb ujawniło istotne różnice w poziomie UE między przedziałami liczb niskich (3,15%) i środkowych (6,51%) ( $p < 0,001$ ), między przedziałem liczb środkowych i wysokich (4,62%) ( $p < 0,001$ ), oraz między niskimi i wysokimi wartościami liczbowymi ( $p < 0,01$ ). Żadna z interakcji pomiędzy czynnikami nie osiągnęła poziomu istotności statystycznej.

Wykonaliśmy podobne analizy dla poziomu przeszacowania (*overestimation error*, OE). W pierwszej kolejności użyliśmy grupy i formatu ( $2 \times 2$ ) jako, odpowiednio: między- i wewnątrzobiekto- wego czynnika oraz OE jako zmiennej zależnej. Analiza wykazała istotny wpływ formatu,  $F(1, 45) = 5,57$ ,  $p < 0,05$ , ale brak istotności dla grupy oraz interakcji między grupą i formatem.

## Błąd szacowania dla poszczególnych wartości liczbowych (1–9)

Aby sprawdzić wpływ grupy, formatu i wyświetlanej nad osią wartości liczbowej (od 1 do 9) na średni poziom EE, wykonano trójczynnikową analizę wariancji z wykorzystaniem grupy jako czynnika międzyzobiekto- wego, oraz formatu i wartości liczbowej jako czynników wewnątrzobiekto- wych ( $2 \times 2 \times 9$ ) oraz błędu szacowania miejsca (EE) jako zmiennej zależnej. Analiza po raz kolejny wykazała istotność wpływu grupy,  $F(1, 45) = 46,57$ ,  $p < 0,001$ , z wyższym EE zaobserwowanym w grupie MLD niż w grupie TD. Także dla formatu wykazano istotny efekt główny,  $F(1, 45) = 4,56$ ,  $p < 0,05$ , z wyższym EE dla liczb niesymbolicznych. Istotność wpływu ujawniono też dla wartości liczbowej,  $F(8, 360) = 1398,57$ ,  $p < 0,01$  oraz wykazano istotność interakcji między grupą i wartością liczbową,  $F(8, 360) = 67,92$ ,  $p < 0,01$ . Rysunek 4 (s. 52) ilustruje tę interakcję: Różnice między grupami dzieci w poziomie EE uzyskano dla każdej z dziewięciu liczb. Istotne różnice wykazano dla liczby 3 ( $p < 0,05$ ), liczby 4 ( $p < 0,001$ ), liczby 6 ( $p < 0,05$ ), liczby 7 ( $p < 0,001$ ), oraz 9 ( $p < 0,05$ ). Średni błąd szacowania miejsca liczb na osi był istotnie większy

w grupie MLD niż w grupie TD w przypadku prawie wszystkich tych liczb, z wyjątkiem liczby 9, dla której poziom EE był wyższy w grupie TD.



**Rysunek 4.** Interakcja między grupą i wartością liczbową (1–9) w średnim błędzie szacowania miejsca

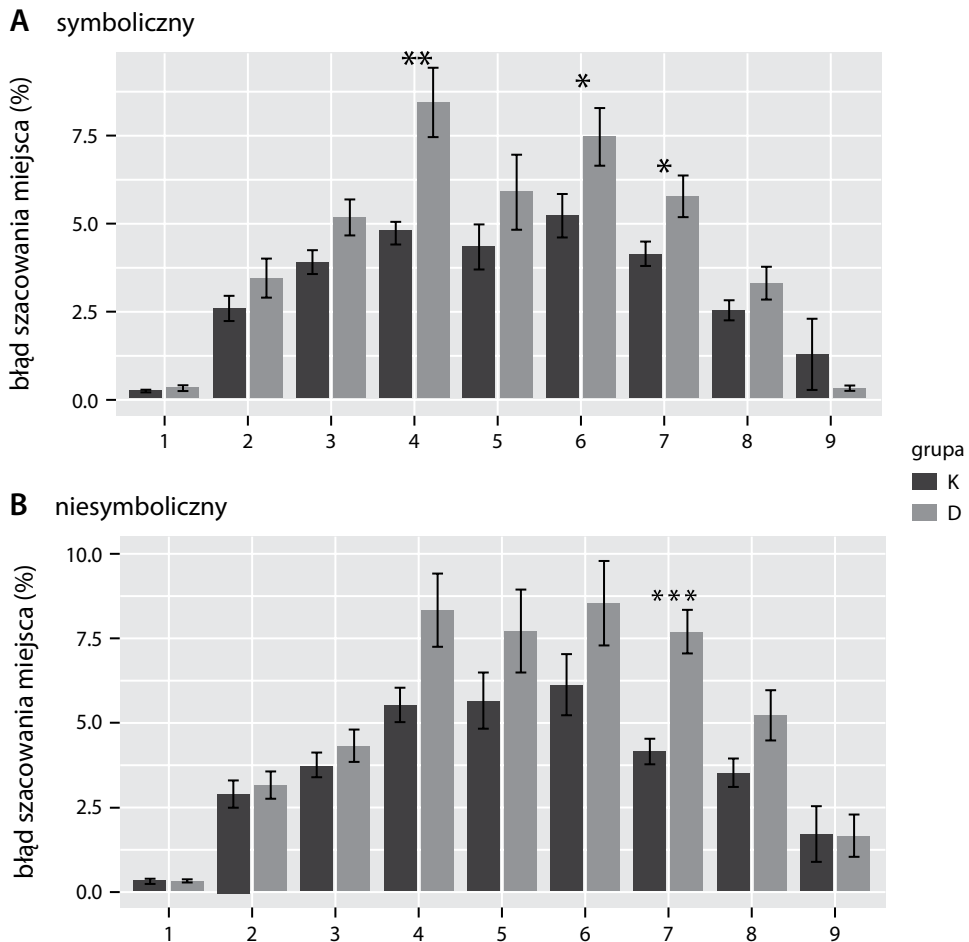
**NOTA:** Wartości średnie przedstawiają słupki; na wykresie widoczne są także wartości błędu standardowego średniej (SEM); K – grupa kontrolna, D – grupa z deficytem w zakresie matematyki.

Dodatkowo, z uwagi na istotność wpływu formatu liczby, porównaliśmy średnie wartości EE między grupami MLD i TD dla poszczególnych wartości liczbowych, oddzielnie w odniesieniu do zadania z formatem symbolicznym i niesymbolicznym, co zilustrowano na rysunku 5 (odpowiednio A i B, zob. s. 53). W przypadku formatu symbolicznego, istotne różnice międzygrupowe zaobserwowano dla liczby 4 ( $p < 0,01$ ), liczby 6 ( $p < 0,05$ ), oraz 7 ( $p < 0,05$ ). W zadaniu z formatem niesymbolicznym, istotne różnice stwierdzono tylko dla liczby 7 ( $p < 0,001$ ).

### Niedoszacowanie i przeszacowanie dla każdej wartości liczbowej (1–9)

Byliśmy również zainteresowani tym, czy problem z szacowaniem miejsca liczb na osi wynika głównie z niedoszacowania czy przeszacowania (czy dzieci z grupy MLD głównie niedoszacują czy przeszacowują lokalizację liczb jednocyfrowych na osi?) oraz czy zależy to od wartości liczbowej. A zatem przeprowadzono podobne analizy (m.in. analogiczne do tych ze zmienną EE opisanych wyżej) z użyciem wskaźników UE i OE jako zmiennych zależnych.

W pierwszej kolejności użyto zmiennych: grupa jako czynnika międzyobiekto-owego, format i wartość liczbową jako czynników wewnątrzobiekto-owych ( $2 \times 3 \times 9$ ) i UE jako zmiennej zależnej. Analiza ujawniła istotny efekt główny dla grupy,  $F(1, 45) = 44,78$ ,  $p < 0,001$ , z wyższym niedoszacowaniem (UE) w grupie MLD niż w grupie TD, jak również dla wartości liczbowej,  $F(1, 45) = 609,7$ ,  $p < 0,01$ , oraz interakcję między tymi dwoma czynnikami,  $F(8, 360) = 50,31$ ,  $p < 0,01$ .

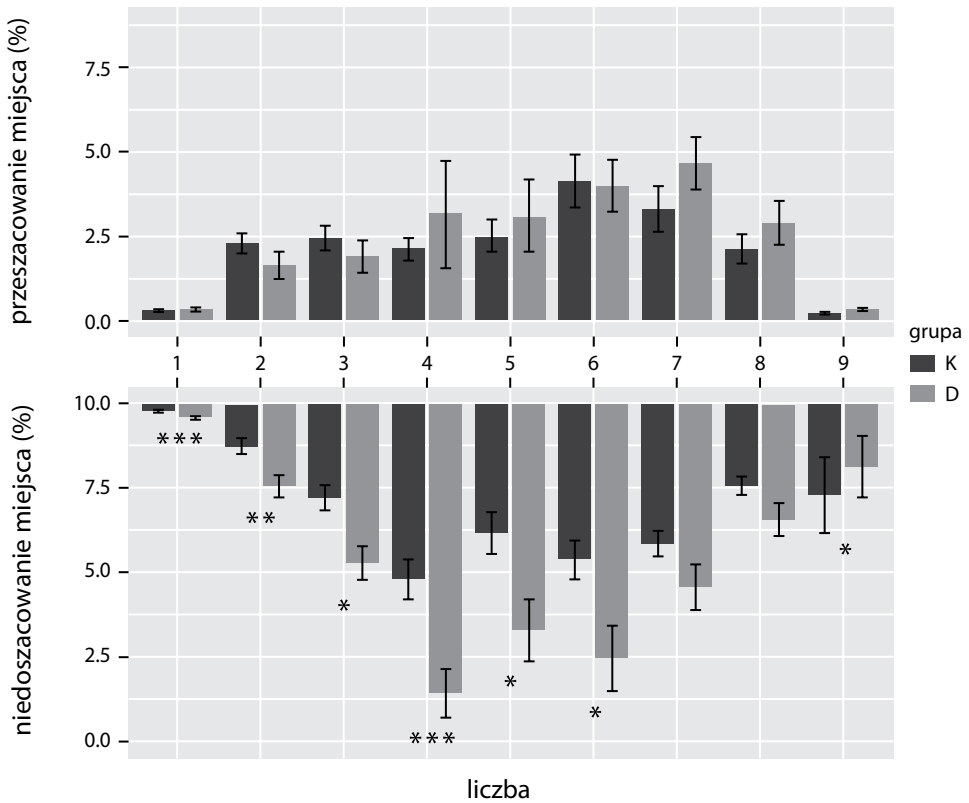


**Rysunek 5.** Różnice między grupami dla każdej wartości liczbowej w poziomie średniego błędu szacowania miejsca, obliczone oddzielnie dla symbolicznego (A) i niesymbolicznego (B) formatu bodźca

**NOTA:** Wartości średnie przedstawiają słupki; na wykresie widoczne są także wartości błędu standardowego średniej (SEM); K – grupa kontrolna, D – grupa z deficytem w zakresie matematyki.

Rysunek 6 (dolny wykres, zob. s. 54) przedstawia tę interakcję i różnice między poziomami UE uzyskanymi dla grup MLD i TD, uzyskanymi dla każdego z dziesięciu liczb. Istotne różnice międzygrupowe otrzymano dla liczby 1 ( $p < 0,001$ ), liczby 2 ( $p < 0,01$ ), liczby 3 ( $p < 0,05$ ), liczby 4 ( $p < 0,001$ ), liczby 5 ( $p < 0,05$ ), liczby 6 ( $p < 0,05$ ) oraz liczby 9 ( $p < 0,05$ ).

Po drugie, wykonaliśmy podobną analizę dla poziomu OE z grupą jako czynnikiem międzyobiektywnym, formatem i wartością liczbową jako czynnikami wewnątrzobiektywnymi ( $2 \times 2 \times 9$ ) oraz wielkością OE jako zmienną zależną. Analiza



**Rysunek 6.** Różnice między grupami dla każdej wartości liczbowej w średnim błędzie przeszacowywania miejsca (górny wykres) i niedoszacowania miejsca (dolny wykres)

**NOTA:** Wartości średnie przedstawiają słupki; na wykresie widoczne są także wartości błędu standardowego średniej (SEM); K – grupa kontrolna, D – grupa z deficytem w zakresie matematyki.

wykazała istotność wpływu tylko dla wartości liczbowej,  $F(8, 360) = 162,26$ ,  $p < 0,01$ . Ani dla pozostałych czynników ani dla interakcji między czynnikami nie uzyskano poziomu istotności. Rysunek 6 (górny wykres) przedstawia wartości średnich i błędów standardowych średnich uzyskane w grupach badanych dzieci oddzielnie dla każdej wartości liczbowej. Żadna z tych różnic międzygrupowych nie okazała się być istotna statystycznie.

## DYSKUSJA

Celem przedstawionych tu badań była ocena wpływu niskiego poziomu umiejętności numerycznych na przetwarzanie przestrzennych reprezentacji liczb u dzieci z użyciem zadania szacowania miejsca liczb na osi (NLE). Wzięliśmy pod uwagę



wielkość błędu szacowania (EE) i oddzielnie efekty dotyczące przesunięcia lokalizacji liczb na osi na prawo i na lewo od właściwej pozycji liczby (*over- and under-estimation*). Dodatkowo, ponieważ zastosowaliśmy w zadaniu NLE symboliczny i niesymboliczny format prezentowanych liczb, możliwe było określenie wpływu formatu liczb na poziom EE.

### **Wpływ niskiego poziomu umiejętności matematycznych i formatu liczb na ogólne wykonanie zadania NLE**

Pod względem wielkości wskaźnika EE, generalnie słabe wykonanie zadania odnotowano u dzieci z niskim poziomem umiejętności numerycznych (grupa MLD) w porównaniu z grupą kontrolną TD, tak jak się spodziewano. Jest to wynik zgodny z rezultatami innych badań (np. Geary i in., 2008; Kucian i in., 2011). Jednak, dodatkowo poza bezdyskusyjnymi różnicami między dwiema badanymi grupami dzieci, uzyskaliśmy także wynik świadczący o znaczeniu formatu liczby, z większą wartością EE w zadaniu z liczbami prezentowanymi jako zbiory kropek u wszystkich badanych. Wskaźnik niedoszacowania obliczony dla każdej wartości liczbowej i formatu liczby (zob. dyskusję wyników poniżej) sugeruje, że wyższy EE dla kropek jest konsekwencją błędów w przeliczaniu ich, stwierdzonych u dzieci z grupy MLD, zaś u dzieci z grupy TD – konsekwencją niedbałości w wykonaniu zadania. Mianowicie, dzieci z grupy kontrolnej także popełniały błędy w identyfikowaniu wartości liczbowych prezentowanych na ekranie, jednak w ich przypadku błędy te nie wynikały z deficytu w zakresie umiejętności przeliczania, ale raczej były spowodowane faktem, że dzieci te nie przeliczały kropek w zbiorach. Prawdopodobnie bazowały w tym zadaniu na szacowaniu liczebności zbioru lub na subitacji, co prowadziło do błędów w przypadku większych wartości liczbowych. Tym samym, w grupie MLD wielkość błędu szacowania miejsca na osi mogła wynikać z deficytów typowych dla dyskalkulii, jako że dzieci z dyskalkulią często przejawiają problemy z przeliczaniem małych zbiorów obiektów, co potwierdziły nasze obserwacje. Tymczasem, u dzieci z grupy TD, mogło to być efektem niedbałości w wykonaniu, tzn. dzieci te chciały jak najszybciej skończyć zadanie, więc w przypadku zbiorów zawierających 7, 8 czy 9 kropek nie przeliczały ich, ale raczej opierały się na oszacowaniu ich liczby. Ponadto jest prawdopodobne, że zarówno niedbałość i szacowanie liczebności (zamiast przeliczania większej liczby kropek) wynikało z nudy, ponieważ dla typowo rozwijających się dzieci takiego rodzaju zadanie może być odbierane jako zbyt łatwe.

Co zaobserwowaliśmy koncentrując się oddzielnie na wpływie grupy i formatu na wartościach niedoszacowania i przeszacowania miejsca? W przypadku niedoszacowań, zaobserwowano zarówno efekt grupy (większe przesunięcie w lewo w grupie MLD) i formatu liczby (taki sam, jak w przypadku wielkości EE, opisany powyżej). Co interesujące, żaden z czynników nie miał znaczenia w przypadku wartości przeszacowania. Wielkość przesunięcia w prawo nie była zależna od problemów z matematyką ani od formatu liczb. Wszystkie dzieci przeszacowywały miejsce prezentowanych liczb, ale błąd taki nie dotyczył w szczególności dzieci z grupy MLD, tak jak to wykazano w przypadku wartości EE. Innymi słowy,

w przypadku przeszacowania nie ma istotnych różnic między dwiema grupami badanych, a zatem zarówno w grupie MLD i TD błąd przeszacowywania jest taki sam.

### **Wpływ trudności w nauce matematyki, formatu liczby i przedziału wartości liczbowych na wykonanie zadania NLE**

Analiza rezultatów dotyczących wpływu grupy, formatu i wartości liczbowej dała nam szerszą perspektywę wykonania zadania NLE w grupie kontrolnej i grupy z trudnościami z nauką matematyki. Biorąc pod uwagę wartości EE obliczone dla trzech przedziałów liczbowych (liczby niskie z wyjątkiem „1” liczby środkowe i liczby wysokie z wyjątkiem „9”), analizy wykazały, że u dzieci w obu grupach błąd szacowania miejsca był większy podczas szacowania lokalizacji liczb z przedziału środkowego, tj. liczb „4”, „5” i „6,” kiedy były wyświetlane zarówno w formacie symbolicznym i niesymbolicznym. Efekt ten może być związany z zakotwiczeniem uwagi w pobliżu liczb „1” i „9”, które stanowią krańcowe punkty odniesienia osi liczbowej użytej w tym zadaniu. Może to też wynikać z efektu umiejscawiania zarówno niskich i wysokich liczb poprzez estymację od lewego (w przypadku „2” i „3”) oraz od prawego (w przypadku „7” i „8”) końca osi, co jest prawdopodobnie łatwiejsze. Ten sam efekt przedziału liczbowego zaobserwowano dla niedoszacowania, ale nie dla przeszacowania, co zilustrowano na rozkładzie wartości UE i OE obliczonych dla każdej liczby od „1” do „9” (zob. dyskusję poniżej).

Jak się spodziewano, interakcja między przedziałem liczbowym i grupą pokazała bardzo wyraźne różnice w poziomie EE otrzymane dla środkowego przedziału liczbowego obecnym w obu grupach, z istotnie gorszym szacowaniem w wykonaniu dzieci z grupy MLD. Zatem, większy błąd w NLE w zakresie środkowego przedziału liczb może pochodzić ze słabej precyzji. Ponadto w odniesieniu do tego przedziału liczbowego w grupie MLD, zaobserwowaliśmy większą wariancję wartości EE, którą widać w wyższych wartościach standardowego błędu średniej (SEM). Istotną różnicę między grupami uzyskano też dla przedziału liczb wysokich; jednakże, wartości EE były niższe niż te otrzymane dla środkowego przedziału u dzieci zarówno z grupy TD i MLD. Różnica ta może być interpretowana jako przejaw problemów z NLE w tej drugiej grupie, ale też jako wyraz problemów z przeliczaniem kropek w przypadku próbek z użyciem niesymbolicznego formatu liczb (w szczególności liczb „7” i „8”; zob. dyskusję dotyczącą poszczególnych wartości liczbowych i formatów poniżej). I wreszcie, najmniejsze i najbardziej zbliżone wartości EE związane były z niskimi wartościami liczbowymi, co jest oznaką sprawności w przetwarzaniu małych liczb u wszystkich dzieci. Jest to prawdopodobnie potwierdzenie powszechnie znanej z literatury większej łatwości i automatyzmu w przetwarzaniu niskich wartości liczbowych. Na przykład wcześniejsze badania dowiodły przesunąć uwagi w kierunku małych liczb (np. Cai, Li, 2015), jak również ich powszechność w codziennym doświadczeniu (np. Dehaene i in., 1993, jednak zob. przegląd Nuerk, Moeller, Klein, Willmes, Fischer, 2011, którzy przedstawili przykłady częstszych codziennych doświadczeń

w posługiwaniu się liczbami wielocyfrowymi). Dodatkowo sposób, w który liczby o niskich wartościach kierują naszą uwagę został też udowodniony w różnych badaniach, w których wykazano przesunięcia uwagi w lewą stronę MNL w zadaniu wyznaczania środka przedziału liczbowego (Göbel i in., 2006; Longo, Lourenco, 2007; Longo, Lourenco, Francisco, 2012), przewagę oddziaływania małych liczb w badaniu nad czasową percepcją cyfr (Schwarz, Eiselt, 2009), zdolność niskich wartości liczbowych do kierowania ogniskiem uwagi w zadaniach z detekcją bodźca-celu (Cai, Li, 2015), oraz częstsze wymienianie niskich niż wysokich wartości liczbowych w zadaniu z losowym generowaniem liczb (tzw. *random number generation task*, Boland, Hutchinson, 2000; Loetscher, Brugger, 2007). Wszystkie te dane potwierdzają, że niskie liczby są przetwarzane szybciej.

Jednakże, niskie wartości EE w przypadku liczb „2” i „3” mogą być też związane z dobrze poznaną wrodzoną zdolnością nazywaną subitacją (przeгляд Dehaene, Molko, Cohen, Wilson, 2004; Feigenson, Dehaene, Spelke, 2004; Patro i in., 2014), która przejawia się szybkim i bezwysiłkowym określaniem liczebności małych zbiorów obiektów. Subitacja wiąże się także z łatwiejszym przetwarzaniem niskich liczb, tu w kontekście bezwysiłkowego przetwarzania jednej, dwóch, trzech lub czterech kropek prezentowanych nad osią liczbową. Sądzymy, że subitacja może być przyczyną lepszej precyzji szacowania na osi liczbowej w przypadku niskich liczb, co oznacza, że przyczyna błędu szacowania ich miejsca (które mogą podlegać subitacji) nie jest taka sama jak w przypadku wysokiej liczby kropek (7 i 8). W przypadku wysokich wartości liczbowych jest nią problem z przeliczaniem lub błędy szacowania liczebności. Innymi słowy, nie jest możliwe popelniać błędy szacowania miejsca w przypadku 2 lub 3 kropek ze względu na problem z przeliczaniem tak małego zbioru obiektów, które zawsze podlegają subitacji.

## Różnice dla poszczególnych wartości liczbowych

Najbardziej pouczającym wynikiem jest ten dotyczący poszczególnych liczb, co pozwala nam na przypuszczenia dotyczące prawdopodobnych strategii stosowanych w lokalizowaniu miejsca liczb na osi przez dzieci z grup TD i MLD. Co wynika z różnic grupowych obliczonych dla każdej liczby i każdego formatu liczb? Analizy pokazały ponownie ten sam efekt, który opisano powyżej. Jednak główny efekt wartości liczbowej i interakcja między grupą i wartością liczbową również były istotne. Wartości EE, UE, i OE obliczone dla każdej liczby pozwoliły ocenić różnice w zakresie trzech przedziałów liczbowych w szczegółach i ujawnić szereg istotnych danych dotyczących liczb „1” i „9”, które były wyświetlane badanym na osi liczbowej.

Stwierdziliśmy po pierwsze, że większa wartość EE, otrzymana dla środkowego przedziału liczbowego, nie jest związana z trudnością w lokalizowaniu liczby „5”, ale raczej liczby „4” i „6”. Różnice między grupami dla tych dwóch liczb były istotne i związane z wyższym błędem szacowania w grupie MLD niż TD. W przypadku liczby „5”, wartości EE były mniejsze, a różnice między grupami nieistotne. Sugeruje to, że wszystkie dzieci (niezależnie od ich umiejętności matematycznych)

wyznaczają punkt odniesienia (*benchmark*) mniej więcej na środku prezentowanej osi liczbowej aby wskazać pozycję liczby. Ponadto w przypadku dzieci z grupy TD, różnice otrzymane dla „4” i „6” sugerują, że zakotwiczenie uwagi w pozycji „5” jest bardziej pomocne w szacowaniu pozycji liczb sąsiadujących z liczbą „5.” Z kolei, u dzieci z grupy MLD, mimo relatywnie małej wartości EE w pozycjonowaniu liczby środkowej, błędy szacowania dla liczb będących obok liczby „5” (na lewo i prawo) były najwyższe w porównaniu do wszystkich pozostałych średnich wartości EE otrzymanych dla pozostałych liczb. Kolejnym ważnym wynikiem dotyczącym tego przedziału liczbowego jest wyższa wariancja w tej grupie dla liczb „4”, „5,” i „6”. Sugeruje to, że nie wszystkie dzieci z niskim poziomem umiejętności matematycznych (MLD) mierzyły się z taką samą trudnością w lokalizowaniu pozycji tych liczb. Rezultat ten zdaje się być zgodny z opiniami ekspertów i doniesieniami opisującymi dyskalkulię jako bardzo złożony deficyt oraz stwierdzeniem, że populacja dzieci cierpiących z powodu słabych umiejętności matematycznych jest bardzo heterogeniczna (przegląd Kaufmann, von Aster, 2012).

Drugi, nawet jeszcze bardziej wart odnotowania wynik, dotyczy różnic między grupami odnotowany dla liczb „3” i „7”. W obu przypadkach, EE jest większy w grupie MLD, szczególnie w tym drugim. Wynik ten zdaje się mieć swoją przyczynę w trudności szacowania miejsca liczb zlokalizowanych w pewnym dystansie od krańców osi liczbowej (zarówno lewego i prawego) i od punktu centralnego (liczby „5”). Jednakże, dodatkowe prześledzenie wartości błędu obliczonych dla formatu symbolicznego i niesymbolicznego ujawniło, że w przypadku liczby „7”, można zidentyfikować jeszcze jedną przyczynę gorszego szacowania w wykonaniu dzieci z grupy MLD oraz generalnie wysokiej wartości EE u wszystkich dzieci. Różnice między grupami były istotne dla obu formatów, jednak wyraźnie wyższy EE wykazano w grupie MLD dla formatu niesymbolicznego. Sugeruje to, że dodatkowe błędy są związane z problemami w przeliczaniu kropek i potwierdza wyniki wcześniejszych badań pokazujących, że dzieci z dyskalkulią przejawiają zaburzoną umiejętność przeliczania (Koontz, Berch, 1996) czy porównywania liczb prezentowanych w formacie niesymbolicznym (Landerl, Fussenegger, Moll, Willburger, 2009; Mussolin i in., 2010). Tego rodzaju problem prawdopodobnie nie dotyczy liczby „3” ze względu na umiejętność subitacji, która redukuje ryzyko popełniania błędów w przeliczaniu. A zatem, to czy zadanie NLE może być poprawnie wykonane z kropkami zamiast cyfr, można zakwestionować ponieważ w rzeczywistości zadanie to mierzy umiejętność NLE, ale dodatkowo obciążoną (nie)umiejętnością przeliczania.

Przegląd wzorców wyników dotyczących wartości niedoszacowania i przeszacowania, jak i dotyczących formatu symbolicznego i niesymbolicznego, umożliwi nam wyjaśnienie wysokich wartości błędu stwierdzonych dla wysokich wartości liczbowych. W przypadku dużej liczby kropek uczestnicy popełniali więcej błędów z powodu pomyłek (np. mylenia liczby „8” z liczbą „9” lub „7” z „8”); lokalizacja liczby „8” była często przesuwana z prawidłowej lokalizacji w kierunku miejsca właściwego dla liczby „7”. A zatem, to przesunięcie jest spowodowane nie tylko słabym operowaniem mentalną osią liczbową (MNL) ale także tym, że liczba została nieprawidłowo określona. Błędy w przeliczaniu mogą być też spowodowane niedbałością dzieci, co było obserwowane zarówno u dzieci z grupy

TD i MLD. Mimo, że uczestnicy byli proszeni o wykonanie zadania możliwie najbardziej precyzyjnie, część z nich prawdopodobnie starała się ukończyć zadanie jak najszybciej. Niektóre dzieci określały liczbę kropek „na oko”. W rezultacie, w przypadku dziewięciu kropek, zaznaczały lokalizację liczby w miejscu, gdzie szacowały lokalizację liczby „8” (nie z powodu trudności w wykonaniu NLE lecz z powodu błędów w przeliczaniu kropek). Potwierdza to także interakcja między przedziałem wartości liczbowych i formatem. Jak odnotowano, w przypadku cyfr arabskich, nie ma różnic w poziomie EE między przedziałem liczb niskich i wysokich. W przypadku kropek natomiast wartości EE były wyższe dla liczb wysokich niż dla niskich. Innymi słowy, gdy dzieci były proszone o oszacowanie lokalizacji niskich lub wysokich liczb prezentowanych jako cyfry, wartość EE była podobnie niska w obu przypadkach, podczas gdy konieczność przeliczenia obiektów w zbiorze prowadziła do wyższych wartości EE w przypadku wysokich liczb.

I wreszcie, wykazaliśmy różnicę w poziomie EE pomiędzy grupami dla liczby „9”, której kierunek jest całkowicie przeciwny do tego widocznego w przypadku pozostałych liczb. Dla tej liczby uzyskano relatywnie wysoką wartość EE, mimo, że jest ona widoczna na ekranie jako końcowy punkt odniesienia na osi liczbowej. Wynik ten jest dość niezrozumiały, ale co więcej, poziom EE był istotnie wyższy w grupie kontrolnej. Wyjaśnić ten rezultat można dwojako, jak również możemy zauważyć pewne wskazówki we wzorcu wyników dotyczących błędów obliczonych oddzielnie dla formatu symbolicznego i niesymbolicznego oraz błędów odnotowanych oddzielnie dla niedoszacowania i przeszacowania. Po pierwsze, błędy szacowania miejsca liczby „9” były widoczne tylko w poziomie wartości niedoszacowania (niemal w ogóle ich nie ma w przypadku przeszacowań). Może to być interpretowane w kontekście podobnych niedoszacowań, które uzyskaliśmy w przypadku innych wysokich wartości liczbowych, w szczególności tych prezentowanych w formacie niesymbolicznym. Dalsze uzasadnienie tej interpretacji związane jest z poziomem EE uzyskanym w zadaniu z formatem niesymbolicznym. Dość duże wartości EE uzyskano w obu grupach, co jest prawdopodobnie efektem nieprawidłowego określania wartości liczbowej. Po drugie, w przypadku formatu niesymbolicznego relatywnie wyższą wartość EE zaobserwowano w grupie TD, podczas gdy w grupie MLD – prawie żadnych błędów szacowania miejsca. Jednakże, warto zaznaczyć, że zróżnicowanie wartości EE w grupie kontrolnej jest znaczne, co prawdopodobnie sugeruje, że błąd szacowania w tym konkretnym warunku (tj. dla „9” prezentowanej w formacie niesymbolicznym) wynika z niskiej precyzji wykonywania zadania widocznej u kilkorga dzieci w tej grupie. Dodatkowo, dzieci uczą się odliczać do dziesięciu, nie do dziewięciu; i stąd ujawniały tendencję do łączenia 9 z miejscem przed końcem osi; jeśli tak było, efekt taki powinien być nieobecny w przypadku osi 1–10. To jednak wywołałoby złamanie symetrii zastosowanej przez nas osi, jako że wtedy punkt środkowy byłby obecny między 5 i 6.

Ogólny ogląd wartości przeszacowania i niedoszacowania dla poszczególnych liczb pokazuje, że dzieci mają tendencje do niedoszacowywania lokalizacji liczb w większym stopniu niż do przeszacowywania oraz, że to niedoszacowywanie jest obserwowane szczególnie u dzieci z trudnościami w matematyce. Średnie wartości OE były niższe niż wartości UE, jak również nie odnotowano żadnych

różnic między grupami w przypadku takich przesunięć w prawo. Różnice między grupami w odniesieniu do niedoszacowania dotyczą większości wartości liczbowych. Jak się zdaje, dzieci MLD przesuwają lokalizację liczb w kierunku lewego krańca osi liczbowej. Jest to prawdopodobnie przejaw określonej strategii stosowanej podczas wykonywania NLE, tj. strategii opartej na „odmierzaniu” odległości od lokalizacji liczb oraz od początku osi liczbowej, bez używania dodatkowych markerów. Uzasadnione jest także sądzić, że przesunięcie uwagi przestrzennej wywołane niskimi wartościami liczbowymi (przedyskutowane powyżej w kontekście wpływu wartości liczbowej) jest bardziej efektywne u osób z MLD. Wartość tej interpretacji może być zweryfikowana, np. w procedurze eksperymentalnej sprawdzającej przesunięcia uwagi orientacyjnej, przy użyciu, na przykład, liczb niskich vs. wysokich poprzedzających prezentację bodźca lub zadania losowego generowania liczb (*random number generation task*) w wykonaniu uczestników z grupy TD i MLD.

### Ograniczenia metodologiczne badania

Przedstawione tu badania dostarczyły pewnych wartościowych wyników, ale nie były wolne od ograniczeń, które należałoby uwzględnić w dalszych badaniach dotyczących podobnych zagadnień. Przede wszystkim, może być trudno porównać wyniki naszych badań z wcześniejszymi doniesieniami z literatury. Między innymi nie mogliśmy ujawnić wyraźnego przeszacowywania miejsca liczb wysokich w stosunku do niskich, aby zweryfikować, czy wzorzec umieszczania liczb jest typowy jak ten opisywany w literaturze u dzieci typowo rozwijających się ponieważ zastosowaliśmy oś liczbową, która była krótsza od tych zastosowanych przez innych badaczy w tym celu. We wcześniejszych badaniach używano szerszego zakresu liczb w zadaniach NLE, zazwyczaj od „0” do „100” (np. Kucian i in., 2011; Rouder, Geary, 2014) lub nawet od „0” do „1000” (np. Ashcraft, Moore, 2012). W jednym z badań, krótsza oś liczbowa (od „1” do „10”) została zastosowana w badaniu znacznie młodszych uczestników (np. Berteletti i in., 2010). Kwestia ta jednak została omówiona w sekcji Metody. Innym ograniczeniem, co najmniej w części związanym ze wspomnianym powyżej, jest problem z utrzymaniem motywacji uczestników. Wykonywanie zadania tak prostego jak NLE z użyciem liczb z zakresu od „1” do „9” mogło być męczące i nudne, szczególnie dla dzieci z grupy kontrolnej (TD). Możliwe, że w niektórych przypadkach poziom EE był rezultatem zmęczenia i znużenia. W przyszłych badaniach nad tym zagadnieniem, zasadne byłoby użycie zadań, które różniłyby się poziomem trudności lub zawęzić przedział wiekowy osób badanych. Ponadto warto byłoby rozważyć zastosowanie dwóch wariantów zadania NLE: z oznaczeniem liczb początkowej i końcowej oraz z oznaczeniem liczby początkowej i wskazaniem skali osi (zob. opis wyżej, tzw. *bouded* i *unbouded*), jako że mogło by to dostarczyć pewnych istotnych danych dotyczących strategii obieranych w wykonywaniu NLE, które są różne w każdym z tych typów zadania. Wydaje się to być istotne szczególnie w przypadku dzieci w takim wieku, jak uczestnicy naszych badań (zob. Link i in., 2014).

## Wnioski

W przedstawionych tu badaniach zastosowano komputerowe zadania NLE z wykorzystaniem liczb w formacie symbolicznym i niesymbolicznym w celu oceny zdolności do szacowania miejsca jednocyfrowych liczb w podobnych wiekowo grupach dzieci z niskim poziomem umiejętności matematycznych (MLD) i typowo rozwijających się (TD) w kontekście wielkości błędu szacowania (EE), jak również niedoszacowania (UE) i przeszacowania (OE). Szczegółowe zebrane dane wskazują, że wszystkie dzieci ujawniły większą wartość EE dla liczb zlokalizowanych w środku osi liczbowej, ale efekt ten był bardziej wyraźny w grupie MLD. Ten efekt grupy stoi w sprzeczności z wnioskami sformułowanymi przez Sella i in. (2020). Co więcej, grupy miały podobny zakres dla OE, zaś różniły się pod względem UE. Wszystkie dzieci przejawiały tendencję do przesunięcia lokalizowania w lewo, lecz było to bardziej widoczne u uczestników z niskim poziomem umiejętności numerycznych. Dzieci te ujawniły większy błąd przesunięcia w lewo niż grupa kontrolna w przypadku większości wartości liczbowych. Analiza wartości EE dla każdej liczby pozwoliła na określenie profilu rozkładów wartości błędów, które sugerują możliwe strategie stosowane przez grupy MLD i TD w szacowaniu miejsca liczb na osi. Wydaje się, że dzieci z trudnościami w matematyce mają tendencję do szacowania odcinków, segmentów osi liczbowej zaczynając od lewego jej krańca, a umieszczanie zakotwiczenia w środku osi (w miejscu „5”) nie ułatwia im poprawnego szacowania pozycji liczb „4” i „6”. I wreszcie, wszystkie dzieci uzyskały także wyższe wartości EE w zadaniu z użyciem formatu niesymbolicznego, szczególnie w przypadku prawego krańca osi, co może być interpretowane jako przejaw błędów w szacowaniu pozycji ale także w przeliczaniu kropek. Jest też dodatkowa wartość aplikacyjna uzyskanych wyników badań w kontekście diagnozy ryzyka dyskalkulii i oceny podstawowych umiejętności numerycznych u uczniów szkół podstawowych. Dwa zadania NLE wykorzystane w niniejszym badaniu stanowią część komputerowej baterii zadań (Gut, Matulewski, Goraczewski, 2016), która stała się narzędziem wspierającym proces badań przesiewowych pod kątem ryzyka dyskalkulii jak również pomiaru bazowych kompetencji numerycznych w Polsce. Wyniki uzyskane w niniejszych badaniach wyraźnie potwierdziły wartość aplikacyjną tego rodzaju komputerowych zadań NLE w badaniu podstawowych umiejętności matematycznych u dzieci.

## BIBLIOGRAFIA

- American Psychiatric Association (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (5<sup>th</sup> edition). Washington, DC: American Psychiatric Association.
- Ashcraft, M. H., Moore, A. M (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 246–267. DOI: 10.1016/j.jecp.2011.08.005.
- Barth, H. C., Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14, 545–551. DOI: 10.1037/a0028560.

- Benjamini, Y., Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 57(1) (Methodological), 289–300. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1995.tb02031.x.
- Berteletti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, P., Zorzi, M. (2010). Numerical Estimation in Preschoolers. *Developmental Psychology*, 46(2), 545–551. DOI: 10.1037/a0017887.
- Boland, P. J., Hutchinson, K. (2000). Student selection of random digits. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 49, 519–529. DOI: 10.1111/1467–9884.00250.
- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33, 1410–1419. DOI: 10.1037/0096-1523.33.6.1410.
- Booth, J.L., Siegler R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189–201. DOI: 10.1037/0012-1649.41.6.189.
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 534–541. DOI: 10.1016/j.tics.2010.09.007.
- Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia Screener by Brian Butterworth. Highlighting pupils with specific learning difficulties in maths.* nferNelson Publishing Company Limited, London.
- Butterworth, B., Varma S., Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education. *Science*, 332, 1049–1053. DOI: 10.1126/science.1201536.
- Cai, Y.C., Li, S.X. (2015). Small number preference in guiding attention. *Experimental Brain Research*, 233, 539–550. DOI: 10.1007/s00221-014-4134-3.
- Cangöz, B., Altun, A., Olkun, S. Kacar, F. (2013). Computer Based Screening Dyscalculia: Cognitive and Neuropsychological Correlates. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 12(3).
- Cappeletti, M., Muggleton, N., Walsh, V. (2009). Quantity without numbers and numbers without quantity in the parietal cortex. *Neuroimage*, 46, 522–529. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2009.02.016.
- Cipora, K., Nuerk, H.C. (2013). Is the SNARC effect related to the level of mathematics? No systematic relationship observed despite more power, more repetitions, and more direct assessment of arithmetic skill. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 66, 1974–1991. DOI: 10.1080/17470218.2013.772215.
- Cipora, K., Patro, K., Nuerk, H.-C. (2015). Are spatial-numerical associations a cornerstone for arithmetic learning? The lack of genuine correlations suggests no. *Mind, Brain, and Education*, 9, 190–206. DOI: 10.1111/mbe.12093.
- Cohen, D. J., Blanc-Goldhammer, D. (2011). Numerical bias in bounded and unbounded number line tasks. *Psychonomic Bulletin & Review*, 18, 331–338. DOI: 10.3758/s13423-011-0059-z.
- Cohen, D. J. Quinlan, P.T. (2018). The log–linear response function of the bounded number-line task is unrelated to the psychological representation of quantity. *Psychonomic Bulletin & Review*, 25, 447–454. DOI: 10.3758/s13423-017-1290-z.
- Dehaene, S. (2011). *Number sense. How the mind creates mathematics.* Oxford University Press.



- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218–224. DOI: 10.1016/j.conb.2004.03.008.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487–506. DOI: 10.1080/02643290244000239.
- Ebersbach, M., Luwel, K. Verschaffel, L. (2013). Comparing apples and pears in studies on magnitude estimations. *Frontiers in Psychology*, 4, 332. DOI: 10.3389/fpsyg.2013.00332.
- Feigenson, L., Dehaene, S., Spelke, E. (2004). *Core systems of number*. *Trends in Cognitive Sciences*, 8, 307–314. DOI: 10.1016/j.tics.2004.05.002.
- Field, A., Miles, J. Field, Z. (2012). *Discovering statistics using R*, London: Sage.
- Field, A., Wilcox, R. R. (2017). Robust statistical methods: a primer for clinical psychology and experimental psychopathology researchers. *Behaviour Research and Therapy*, 98, 19–38. DOI: 10.1016/j.brat.2017.05.013.
- Fischer, M. H., Shaki, S. (2014). Spatial associations in numerical cognition—From single digits to arithmetic. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(8), 1461–1483. DOI: 10.1080/17470218.2014.927515.
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345–362. DOI: 10.1037/0033-2909.114.2.345.
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of individual differences in achievement growth in mathematics: a five year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47, 1539–1552. DOI: 10.1037/a0025510.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., De Soto, C. M. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88, 121. DOI: 10.1016/j.jecp.2004.03.002.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., Bailey, D. H. (2012). Mathematical Cognition Deficits in Children With Learning Disabilities and Persistent Low Achievement: A Five-Year Prospective Study, *Journal of Educational Psychology*, 104, 206–223. DOI: 10.1037/a0025398.
- Geary, D. C., Hoard, M.K., Nugent, L., Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33, 277–299. DOI: 10.1080/87565640801982361.
- Georges, C., Hoffmann, D., Schiltz, C. (2017). Mathematical abilities in elementary school: Do they relate to number–space associations? *Journal of Experimental Child Psychology*, 161, 126–147. DOI: 10.1016/j.jecp.2017.04.011.
- Göbel, S. M., Calabria, M., Farnè, A., Rossetti, Y. (2006). Parietal rTMS distorts the mental number line: simulating «spatial» neglect in healthy subjects. *Neuropsychologia*, 44, 860–868. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2005.09.007.
- Gut M., Matulewski, J., Goraczewski, Ł. *Prokalkulia 6–9: Test oceny behawioralnych wskaźników umysłowych reprezentacji liczb i ryzyka dyskalkulii*. Pomorskie Centrum Diagnostyki, Terapii i Edukacji Matematycznej Promathematica, Gdańsk 2016.
- Halberda, J., Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44, 1457–1465. DOI: 10.1037/a0012682.

- Halberda, J., Mazocco, M. M., Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*, 665–668. DOI: 10.1038/nature07246.
- de Hevia, M.D., Vallar, G., Girelli, L. (2008). Visualizing numbers in the mind's eye: the role of visuo-spatial processes in numerical abilities. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *32*, 1361–1372. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2008.05.015.
- Hoffmann, D., Mussolin, C., Martin R., Schiltz, C. (2014). The impact of mathematical proficiency on the number-space association. *PLoS ONE*, *9*(1), e85048. DOI: 10.1371/journal.pone.0085048.
- Hollands, J. G., Dyre, B. P. (2000). Bias in proportion judgments: The cyclical power model. *Psychological Review*, *107*, 500–524. DOI: 10.1037/0033-295X.107.3.500.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., Dehaene S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Review of Neuroscience*, *6*, 435–448. DOI: 10.1038/nrn1684.
- Isaacs, E. B., Edmonds, C. J., Lucas, A., Gadian, D. G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight: a neural correlate. *Brain*, *124*, 1701–1707. DOI: 10.1093/brain/124.9.1701.
- Kaufmann, L., von Aster, M. (2012). The Diagnosis and Management of Dyscalculia. *Deutsches Arzteblatt International*, *109*(45), 767–778. DOI: 10.3238/arztebl.2012.0767.
- Koontz, K. L., Berch, D. B. (1996). Identifying simple numerical stimuli: Processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children. *Mathematical Cognition*, *2*, 1–23. DOI: 10.1080/135467996387525.
- Krajcsi, A., Kojouharova, P., Lengyel, G. (2017). Development of Understanding Zero. Preprints.
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin E., von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage* *57*, 782–795. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.01.070.
- Landerl, K., Bevan, A., Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, *93*, 99–125. DOI: 10.1016/j.cognition.2003.11.004.
- Landerl, K., Fussenegger, B., Moll, K., Willburger, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: two learning disorders with different cognitive profiles. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(3), 309–324. DOI: 10.1016/j.jecp.2009.03.006.
- LeFevre, J-A, Lira, C. J., Sowinski, C., Cankaya, O., Kamawar, D., Skwarchuk, S-L. (2013). Charting the role of the number line in mathematical development. *Frontiers in Psychology*, *4*, 641. DOI: 10.3389/fpsyg.2013.00641.
- Link, T., Huber, S., Nuerk, H-Ch., Moeller, K. (2014). Unbounding the mental number line – new evidence on children's spatial representation of numbers. *Frontiers in Psychology*, *4*, 1021. DOI: 10.3389/fpsyg.2013.01021.
- Longo, M.R., Lourenco, S.F. (2007). Spatial attention and the mental number line: Evidence for characteristic biases and compression. *Neuropsychologia*, *37*, 843–855. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2006.11.002.

- Longo, M. R., Lourenco, S.F., Francisco, A. (2012). Approaching stimuli bias attention in numerical space. *Acta Psychologica*, *140*, 129–132. DOI: 10.1016/j.actpsy.2012.04.001.
- Luwel, K., Peeters, D., Dierckx, G., Elke Sekeris E., Verschaffel, L. (2018). Benchmark-based Strategy Use in Atypical Number Lines. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, *72*(4), 253–263. DOI: 10.1037/cep0000153.
- Mair, P., Wilcox, R. (2016). Robust statistical methods in r using the wrs2 package. *Unpublished technical report*.
- McCaskey, U., von Aster, M., Maurer, U., Martin, E., O’Gorman Tuura, R., Kucian, K. (2018). Longitudinal brain development of numerical skills in typically developing children and children with developmental dyscalculia. *Frontiers in Human Neuroscience*, *11*, 629. DOI: 10.3389/fnhum.2017.00629.
- Merrit, D. J., Brannon, E. M. (2013). Nothing to it: Precursors to a zero concept in preschoolers. *Behavioural Processes*, *93*, 91–97. DOI: 10.1016/j.beproc.2012.11.001.
- Michels, L., O’Gorman, R., Kucian, K. (2018). Functional hyperconnectivity vanishes in children with developmental dyscalculia after numerical intervention. *Developmental Cognitive Neuroscience*, *30*, 291–303. DOI: 10.1016/j.dcn.2017.03.005.
- Mix, K. S., Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. *Advances in Child Development and Behavior*, *42*, 197–243. DOI: 10.1016/b978-0-12-394388-0.00006-x.
- Molko, N., Cachia, A., Riviere, D., Mangin, J. F., Bruandet, M., Le Bihan, D., Cohen, L., Dehaene, S. (2003). Functional and structural alterations of the intraparietal sulcus in a developmental dyscalculia of genetic origin. *Neuron*, *40*, 847–858. DOI: 10.1016/s0896-6273(03)00670-6.
- Mussolin, C., Mejias, S., Noël, M.P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, *115*, 10–25. DOI: 10.1016/j.cognition.2009.10.006.
- Mussolin, C., De Volder, A., Grandin, C., Schlögel, X., Nassogne, M. C., Noël, M. P. (2009). Neural correlates of symbolic number comparison in developmental dyscalculia. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *22*, 860–874. DOI: 10.1162/jocn.2009.21237.
- Nuerk, H. C., Moeller, K., Klein, E., Willmes, K., Fischer, M. (2011). Extending the mental number line. A review of multi-digit number processing. *Journal of Psychology*, *219*, 3–22. DOI: 10.1027/2151-2604/a000041.
- Patro, K., Nuerk, H.-Ch., Cress, U., Haman, M. (2014). How number-space relationships are assessed before formal schooling: A taxonomy proposal. *Frontiers in Psychology*, *5*, 419. doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00419.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*, 33–41. DOI: 10.1016/j.cognition.2010.03.012.
- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, *83*, 274–278. DOI: 10.1037/h0028573.
- Rinaldi, L., Girelli, L. (2016). A place for zero in the brain. *Trends in Cognitive Sciences*, *20*(8), 563–564. DOI: 10.1016/j.tics.2016.06.006.

- Rotzer, S., Kucian, K., Martin, E., von Aster, M., Klaver, P., Loenneker T. (2008). Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, *39*, 417–422. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2007.08.045.
- Rouder, J. N., Geary, D. C. (2014). Children’s cognitive representation of the mathematical number line. *Developmental Science*, *17*(4), 525–536. DOI: 10.1111/desc.12166.
- Rykhlevskaia, E., Uddin, L. Q., Kondos, L., Menon, V. (2009). Neuroanatomical correlates of developmental dyscalculia: combined evidence from morphometry and tractography. *Frontiers in Human Neuroscience*, *3*, 51. DOI: 10.3389/neuro.09.051.2009.
- Sandrini M., Rusconi E. (2009). A brain for numbers. *Cortex*, *45*, 796–803. DOI: 10.1016/j.cortex.2008.09.002.
- Sasanguie, D., Verschaffel, L., Reynvoet, B. Luwel, K. (2016). The Development of Symbolic and Non-Symbolic Number Line Estimations: Three Developmental Accounts Contrasted Within Cross-Sectional and Longitudinal Data. *Psychologica Belgica*, *56*(4), 382–405. DOI: 10.5334/pb.276.
- Schwarz, W., Eiselt, A. K. (2009). The perception of temporal order along the mental number line. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *35*, 989–1004. DOI: 10.1037/a0013703.
- Sella, F., Sasanguie, D., Reynvoet, B. (2020). Judging the order of numbers relies on familiarity rather than activating the mental number line. *Acta Psychologica*, *204*, 1–7. DOI: 10.1016/j.actpsy.2020.103014.
- Siegler, R. S., Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*, 237–243. DOI: 10.1111/1467-9280.02438
- Wai, J., Lubinski, D., Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, *101*, 817–835. DOI: 10.1037/a0016127.
- Wechsler, D. (1974). *Wechsler intelligence scale for children—revised*. New York: Psychological Corporation.
- Wellman, H. M., Miller, K. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology*, *4*, 31–42. DOI: 10.1111/j.2044-835X.1986.tb00995.x.
- Wilcox, R. R. (2012). *Introduction to Robust Estimation & Hypothesis Testing*. 3rd edition. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.